

Hipparch, Ptolemäus, Kepler, und die Gestalt der Erdbahn

von Burkard Steinrücken

Westfälische Volkssternwarte und Planetarium Recklinghausen
Stadtgarten 6, 45657 Recklinghausen
www.sternwarte-recklinghausen.de



Claudius Ptolemäus im Ulmer Münster

Es steht in jedem Physikbuch: Die Planeten laufen auf Ellipsen um die Sonne. Seit Keplers Entdeckung gehört diese Fundamentalerkenntnis über den Lauf gravitativ gebundener Himmelskörper zu den kostbarsten Perlen der Naturwissenschaft, die aber nur mit vielen Mühen im Lauf einer 2000 jährigen Entdeckungsgeschichte gehoben werden konnte.

Wie man darauf kommt, dass die Erdbahn kein zentrischer Kreis um die Sonne sein kann, erklären die wenigsten Physikbücher. Und auf welchen Vorstufen der Erkenntnis man sich der Wahrheit angenähert hat, schon gar nicht. Im Gegenteil: Die Vorläufer Keplers, insbesondere Hipparch und Ptolemäus, werden manchmal sogar als durch ihre Fehlvorstellungen in die Irre geleitete arme Gelehrte dargestellt, deren Auffassungen – zumindest in der schulischen und universitären Physikausbildung - schnell zu überwinden seien. Es zeigt sich aber, dass bereits in der Antike gute Modelle entwickelt wurden, die erst durch Keplers Erkenntnisse verbessert werden konnten.

Dieser Aufsatz will ohne allzu große historische Strenge das didaktische Potential verschiedener Erdbahnmodelle beleuchten.

Einleitung

Seit Urzeiten beobachtet der Mensch den täglich sanft veränderlichen Sonnenlauf. Wie auf einer Spirale scheint sich die Sonne um die Erde herum zu winden. Im Winter geht sie am Südosthorizont von Tag zu Tag weiter im Norden, im Sommer am Nordosthorizont nach und nach weiter im Süden auf. Dabei wandert ihr Auf- und Untergangsort in ständig wechselnden Schrittgrößen. Die Richtung dieser Horizontverlagerung wendet sich zweimal im Jahr. Einige Wochen um diese Sonnenwenden herum verändert sich der Horizontort kaum merklich. Auf halbem Weg zwischen den Sonnenwendpunkten ist die Verlagerung der Horizontorte dagegen bereits an aufeinanderfolgenden Tagen zu bemerken. Wenn sich die Abfolge der täglichen Sonnenbahnen wiederholt, ist ein Jahr vergangen, in dem sich die Sonne 365 oder 366 mal um die Erde gewunden hat.

Dieses Phänomen des ineinander verzahnten täglichen und jährlichen Sonnenlaufs lässt sich durch eine Doppelhelix, die aus insgesamt 365 aufsteigenden und absteigenden Windungen besteht, symbolisch darstellen. Dieses erste phänomenologisch begründete Modell der geozentrischen Sonnenbahn ist ideal für eine vorwissenschaftliche Beschäftigung mit den Gesetzen des Himmels. Es ist geeignet, sowohl Ehrfurcht vor den Symmetrien einer harmonischen Weltordnung zu erwecken als auch Ansporn zu einer weitergehenden Beschäftigung mit dem Sonnenlauf zu sein, und wohl deshalb hat eine drehbare Doppelhelix auch Eingang in das von H. Kückelhaus errichtete Erfahrungsfeld der Sinne gefunden (Abb. 1).

Für eine wissenschaftliche Herangehensweise an das Phänomen des Sonnenlaufs müssen quantifizierbare Kriterien gefunden werden, die allein das Ausgangsmaterial für Modellbildungen in der Naturwissenschaft liefern können. Hier stehen uns zur Verfügung: Erstens die räumliche Bestimmung der solaren Bahnlage am Himmel z.B. durch die Beobachtung der Sonnenorte am Horizont oder durch das Phänomen des Schattenwurfs und zweitens die zeitliche Abfolge der zyklisch wiederkehrenden Phänomene, die durch Abzählen ganzer Tage zwischen herausragenden Ereignissen im jährlichen Lauf leicht bestimmt werden können.

Die Jahrespunkte – Solstitien und Äquinoktien

Die hier angesprochenen „herausragenden Ereignisse“ sind die *Sonnenwenden* oder *Solstizien* als extreme tägliche Sonnenbahnen und die zwei *Tag-Nacht-Gleichen* oder *Äquinoktien*, die als mittlere Bahn zwischen den zwei Sonnenbahnen an den Tagen der Sonnenwenden herausragen.

Die Tage der Sonnenwenden als längster bzw. kürzester Tag mit dem höchsten bzw. tiefsten Mittagsstand sind damit schon hinreichend in ihrer Ausnahmestellung begründet. Schwieriger und abstrakter ist die Begründung der Ausnahmestellung im Fall der Tag-Nacht-Gleichen. Sie sind nicht etwa daran zu erkennen, dass es zwölf Stunden dunkel und zwölf Stunden hell ist, wie der Wortlaut vermuten lässt, denn die Dämmerungszeiten verhindern eine exakte Identifizierung der Tag-Nacht-Gleichen nach diesem Kriterium. Aber auch die Zeit zwischen Aufgang und Untergang der Sonne ist an diesen Tagen länger als zwölf Stunden, da die Lichtbrechung die Sonne in Horizontnähe merklich anhebt, was den Aufgang um einige Minuten verfrüht und den Untergang ebenso verzögert. Der Begriff Tag-Nacht-Gleiche ist in jedem Fall irreführend und nur auf einer Erde ohne Lufthülle, die keine Dämmerungs- und Lichtbrechungseffekte kennt, hätte er einen konkreten Sinn.

Nur am Lauf des Schattens sind die Tag-Nacht-Gleichen mit guter Genauigkeit im Alltag zu identifizieren. An diesen Tagen läuft die Schattenspitze z.B. eines Obeliskens oder einer Straßenlaterne auf einer geraden Linie. An allen anderen Tagen im Jahr durchläuft die Schattenspitze eine Hyperbel, deren geöffnete Seite im Sommerhalbjahr anders gerichtet ist als im Winterhalbjahr (Abb. 2). Die „herausragenden Ereignisse“, die wir im folgenden die Jahrespunkte nennen werden, lassen sich nun wie folgt klassifizieren. An den Sonnenwendtagen läuft der Schatten auf maximal gekrümmten Hyperbeln, an den Tag-Nacht-Gleichen auf geraden Linien. Da die Sonnenbahn während der Tag-Nacht-Gleichen sich täglich rasch verlagert, ist die Bestimmung nach wenigen Jahren tagesgenau. Man mag nun einsehen, warum der Obelisk – der *Gnomon* – als eines der bedeutsamsten astronomischen Messinstrumente der Antike galt. Aber auch mit einem äquatorial ausgerichteten Ring lassen sich die Tag-Nacht-Gleichen mit Tagesgenauigkeit nach der Methode des Claudius Ptolemäus bestimmen [1]. Die Sonne steht an diesen Tagen auf dem Himmelsäquator und der sonnenzugewandte Bogen eines äquatorialen Rings wirft seinen Schatten auf den sonnenabgewandten Teil des Ringes.

Die Länge der Halbjahre zwischen den Äquinoktien

Die Jahrespunkte sind damit durch die Lage der Schattenspur, also ein rein räumliches Phänomen, klassifiziert. Eine Zeitzählung ist zu ihrem Nachweis nicht erforderlich. Die Zeitzählung liefert uns nun zusätzliche Informationen, die wir zur Bestimmung der Dynamik der Sonnenbewegung verwenden können. So groß, wie man vielleicht zunächst vermutet, ist das Gleichmaß der jährlichen Bewegung der Sonne nicht. Zählt man nämlich die Tage, die zwischen den Jahrespunkten vergehen, so stellt man deutliche Unterschiede in der Länge der Jahreszeiten fest. Wir verwenden für diese Zählung unseren Gregorianischen Kalender, in dem die Frühlingstag-Nacht-Gleiche am 21. März und die Herbsttag-Nacht-Gleiche am 23. September eintritt und zählen mit Tagesgenauigkeit.

Anzahl der Tage zwischen Frühlings- und Herbst-Tag-Nacht-Gleiche:

	11 Tage im März
+	30 Tage im April
+	31 Tage im Mai
+	30 Tage im Juni
+	31 Tage im Juli
+	31 Tage im August
+	22 Tage im September
=	186 Tage

Anzahl der Tage zwischen Herbst- und Frühlings-Tag-Nacht-Gleiche:

	8 Tage im September
+	31 Tage im Oktober
+	30 Tage im November
+	31 Tage im Dezember
+	31 Tage im Januar
+	28 Tage im Februar
+	<u>20 Tage im März</u>
=	179 Tage

Die genaue zeitliche Lage der Sonnenwenden lässt sich durch die Beobachtung der Bahn nicht bestimmen, da diese für mehrere Tage um die eigentliche Wende fast unverändert bleibt. Durch Mittelung der oben abgezählten Längen des Sommer- und Winterhalbjahres lassen sie sich aber dennoch mit Tagesgenauigkeit angeben. Die Sommersonnenwende tritt 93 Tage nach

Dem Frühlingsanfang ein, also am 21. Juni, die Wintersonnenwende 89 – 90 Tage nach Herbstbeginn, also am 20. oder 21. Dezember.

Dehnt man die Versuchsreihe über mehrere Jahre aus, so lässt sich auch die Genauigkeit steigern. Man erhält schließlich eine Länge des Winterhalbjahres von 178,83 Tagen, eine Sommerhalbjahreslänge von 186,42 Tagen und eine Gesamtjahreslänge von 365,25 Tagen. Mit dieser Genauigkeit waren die Werte die Halbjahreslängen bereits im ersten vorchristlichen Jahrhundert bekannt. Sie waren die Basis für die Reform des römischen Kalenders durch Julius Caesar 46 v. Chr., der sich auf die Kenntnisse der alexandrinischen Astronomie stützte.

Modelle für die Erdbahn

Diese Diskrepanz zwischen der Länge des Sommer- und Winterhalbjahres fordert zu einer Erklärung heraus. Man findet schnell Hypothesen der Art, dass die Sonne ungleiche Strecken mit gleichbleibender Geschwindigkeit zwischen den Jahrespunkten zurücklegt, oder gleichlange Strecken ungleich schnell durchläuft oder beides zugleich. Auch eine Variation der Tageslänge, die ja in unserer Zeitzählung den Takt angab, kommt in Frage.

Die ersten überlieferten Erklärungsmodelle stammten von den babylonischen Astronomen [2,3,4,5]. Sie erkannten bereits, dass die Sonne im Laufe eines Jahres eine ganz bestimmte Straße am Sternenhimmel abschreitet und dass auch die Finsternisse nur auf dieser Sonnenstrasse eintreten können. Die Sternbilder, die die Kulisse für die Wanderung der Sonne bilden, wurden im Laufe der Zeit auf zwölf gebracht und zum Tierkreis oder Zodiakus zusammengefasst, der um 500 v. Chr. als Bezugskreis für den Sonnen-, Mond-, und Planetenlauf eingeführt wurde.

Die Astronomen Babylons nahmen u.a. an, dass die Sonne den Tierkreis mit wechselnder Geschwindigkeit durchläuft. Vom 13. Grad der Jungfrau bis zum 27. Grad der Fische setzten sie in ihren Berechnungsschemata die Sonnengeschwindigkeit zu 30° pro synodischen Monat, auf dem anderen Teilstück des Tierkreises war die Sonnengeschwindigkeit mit $28^\circ 7' 30''$ im synodischen Monat etwas geringer.

Diese Hypothese fand Anwendung im sog. *System A* der babylonischen Mondrechnung zur rechnerischen Ermittlung der Neumond-, Neulicht- und Vollmondphasen und Finsternisse. Folglich verblieb die Sonne länger in jenem Bereich des Tierkreises, der nördlich des Himmelsäquators liegt. Damit ist unser Nordhalbkugelsommer länger als der Winter. Sicher haben die Babylonier nicht wirklich an einen sprunghaften Wechsel der Sonnengeschwindigkeit geglaubt. Die babylonische Astronomie um 300 v. Chr. berechnete die Stellung der Sonne und der Planeten im Tierkreis, die Neulichter und Mondfinsternisse in Tabellenform. Jede Zeile ging aus der vorhergehenden unter Anwendung bestimmter einfacher Rechenoperation hervor. Jede Abweichung der wahren Planetengeschwindigkeiten von ihren langjährigen Mittelwerten wurde bestenfalls durch eine Korrektur an den

Mittelwert erreicht, die in diskreten Sprüngen vorgenommen wurden. War es erforderlich, so wurden die Geschwindigkeiten bis zu festen Grenzen erhöht, um dann wieder sprunghaft verringert zu werden. Ein solches Schema für den Sonnenlauf verwendete die zum System A konkurrierende Mondtheorie des heute in der astronomiehistorischen Forschung genannten *Systems B*.

Die Tatsache, dass sprunghafte Veränderungen auftreten, ist Ausdruck der babylonischen Berechnungsweise und kein Hinweis auf eine Annahme einer sprunghaft veränderlichen Natur. Es gibt keinen Hinweis in den Keilschrifttafeln aus dem Zweistromland, dass man damals schon ein räumliches und geometrisches Bild von der Himmelsmechanik entwickelte. Die Geometrisierung und die darauf gegründeten Weltmodelle kam erst in der griechischen Antike zur Blüte. Das Weltall dachte man sich nun aus Kugelschalen aufgebaut in denen die Planeten kreisförmige Bahnen beschrieben.

Der Grundgedanke der Geometrisierung, der freilich immer von einer in den Mittelpunkt der astronomischen Fundamentalkreise Äquator und Tierkreis gesetzten Welt ausgeht, verhilft augenblicklich zum Verständnis der relativen Lage der Jahreseckpunkte zueinander. Auch im heutigen heliozentrischen Weltbild bleiben diese Erkenntnisse gültig, denn die Erdmitte ist tatsächlich Bestandteil beider Fundamentebenen, der irdischen Äquatorebene (trivial, denn durch die Erdrotation definiert sich der Äquator erst) und der durch den Tierkreis umschriebenen Erdbahnebene (Erd- und Sonnenmitte definieren durch ihren freien Fall um das Schwerezentrum diese Ebene). Der Tierkreis ist gegen die Äquatorebene der Erde um $23,5^\circ$ geneigt.

Auch die im geozentrischen Weltbild als ruhende Weltmitte gedachte Erdkugel ist sowohl Zentrum der Äquatorebene und der Tierkreisebene (Abb. 3). Die Schnittlinie der zwei sich schneidenden Fundamentebenen läuft demnach auch durch die Erdmitte. Die Schnittlinie markiert die beiden Punkte am Himmel in denen die Sonne bei den Tag-Nachtgleichen gesehen werden kann. Folglich stehen die Jahrespunkte der Tag-Nachtgleichen sich diametral gegenüber und haben einen Winkelabstand von 180° . Die Wendepunkte sind von diesen Punkten der Tag-Nacht-Gleichen 90° entfernt, denn die durch die Himmelskugel begrenzte Tierkreisebene erhebt sich beim Blick senkrecht zur Schnittlinie am höchsten hinauf und senkt sich am tiefsten unter die Äquatorebene hinab.

Aufgrund dieser geometrischen Tatsache lassen sich sogleich alle ad-hoc-Hypothesen zurückweisen, die die ungleiche Länge der Halbjahre auf verschiedenen große Winkeldistanzen zwischen den Jahreseckpunkten zurückweisen. Zwischen allen Eckpunkten erstrecken sich Winkeldistanzen von 90° ! Mithin erklärt sich die Diskrepanz durch eine uneinheitliche Winkelgeschwindigkeit der Sonne. Damit kann man den Babyloniern unbedenklich Recht geben, wenn man dieses deskriptive Stadium der Naturerkenntnis nicht verlassen will. Wer darüber hinaus nach Gründen für die variable Winkelgeschwindigkeit der Sonne forscht, wird schnell neue Hypothesen finden, die nun erstmals Bezug auf die wahre räumliche Gestalt der Sonnenbahn oder Erdbahn nehmen müssen. An dieser Stelle ist der Hinweis angebracht, das es für die nun folgende mathematische Ausarbeitung der Hypothesen und die daraus folgerichtig abgeleiteten Konsequenzen ohne Belang ist, ob wir von einem Umlauf der Erde um die Sonne ausgehen oder von einem Umlauf der Sonne um die Erde. Im mathematischen Sinne ist dies völlig gleichbedeutend und als Koordinatentransformation rechnerisch zu erfassen. Es spielt bei dieser grundlegenden Umlaufbewegung keine Rolle, ob ein gedachter Beobachter auf der Sonne den Lauf der Erde im Tierkreis beschreibt, oder ob wir reale Beobachter den Lauf der Sonne in diesem bestimmen. Bei einem Wechsel vom Geozentrum ins Heliozentrum lässt sich die geozentrische Sonnenkoordinate namens „ekliptische Länge“ durch Hinzuzählen von 180° sogleich in die richtige heliozentrische ekliptische Länge der Erde verwandeln. Es kommt also nur auf den Beobachtungsstandpunkt an, und diese Wahl ist zumindest in der Mathematik durch keine Sachzwänge behindert. Im folgenden werden wir uns aber meist für den heliozentrischen Standpunkt entscheiden, was keine Rolle in den mathematischen Konsequenzen spielt, aber in der Wortwahl der Erklärungen, die sich nicht allzu weit vom Hauptstrom des schulischen Astronomieunterrichtes entfernen soll.

Das Exzentermodell von Hipparch

Das erste Modell der wahren Umlaufbahn Sonne-Erde (ab jetzt: „Erdbahn“, auch wenn in der Antike „Sonnenbahn“ gemeint war) stammt von Hipparch und entstand um 150 v. Chr.. Beschrieben ist es im *Almagest* des Claudius Ptolemäus, der ca. 300 Jahre später entstand [6]. Hipparch wollte die von der babylonischen Astronomie bekannte variable Sonnengeschwindigkeit nicht auf eine tatsächlich wechselnde absolute Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn zurückführen, sondern auf eine relative Abstandsveränderung zwischen Erde und Sonne. Eine Erde, die mit gleichbleibendem Tempo, aber mit vergrößertem Abstand zur Sonne Teilstücke ihrer Bahn zurücklegt, ruft für den irdischen Beobachter scheinbar eine Reduktion der Winkelgeschwindigkeit der Sonne hervor, denn ein bestimmtes Bogenstück erscheint kürzer, wenn es aus der Ferne angepeilt wird.

Hipparch kam auf Idee, es mit einem exzentrisch gelagerten Kreis zu versuchen, der von der Erde mit gleichbleibendem Tempo durchlaufen wird (Abb. 4). Die Sonne steht nun nicht mehr in der Mitte der kreisförmigen Erdbahn, sondern um die Strecke e (= Exzentrizität) aus der Mitte verlagert. Die Jahreseckpunkte der Sonnenwenden und Äquinoktien, die sich aus dem oben geschilderten Schnitt der Fundamentebenen ableiten lassen, liegen alle auf dem Tierkreis um 90° voneinander entfernt. Diese abstrakten Koordinatenpunkte, die kein räumliches oder materielles Äquivalent im Weltall beanspruchen können, denken wir uns in unendlicher Ferne an die hypothetische abschließende Fixsternkugel gesetzt. Demgegenüber fällt die tatsächliche räumliche Erstreckung der Erdbahn und ihre Beschaffenheit, um die es hier erstmals geht, nicht ins Gewicht und wir können uns das Kreuz der Blickrichtungen zu den Jahreseckpunkten auch als in der Sonne gelagert denken (Abb. 4). Hätten wir die im Sinne der Koordinatenlehre hier logisch reinere geozentrische Position nicht aufgegeben, wäre dieses Argument nicht notwendig.

Hier soll aber nun die Erde gleichmäßig auf dem exzentrischen Kreis laufen. Sogleich ist einsichtig, dass das Winterhalbjahr vom Herbstäquinoktium bis zum Frühlingsäquinoktium kürzer als das Sommerhalbjahr vom Frühlings- bis zum Herbstäquinoktium ist. Mathematisch ausgedrückt lauten die Grundannahmen von Hipparchs Modell: Die Längen der Halbjahre verhalten sich wie die jeweils durchlaufenen Bogenstücke der Erdbahn. Damit lässt sich ein Wert für die Exzentrizität e des Modells entwickeln. Die Größe der Erdbahn ist allerdings mit diesen Modellen noch nicht bestimmbar, und so nehmen wir für den mittleren Abstand a der Erde von der Sonne (beim Kreis der Radius) die Einheit 1. Die lineare Exzentrizität e steht mit der numerischen Exzentrizität ε über $e = \varepsilon \cdot a$ in Beziehung. Das Bogenstück der Erdbahn, das von der Erde im Winterhalbjahr T_{Winter} durchlaufen wird, lässt sich schnell in Einheiten der Gesamtjahreslänge T angeben. Von der Dauer des halben Jahres werden die Zeitspannen abgezogen, die für das Durchlaufen der zwei kleinen Bahnstücke der Länge e benötigt werden.

$$T_{Winter} = \frac{T}{2} - \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2\pi \cdot a} \cdot T = T \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi} \right)$$

⇔

$$\varepsilon = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{T_{Winter}}{T} \right)$$

Die Exzentrizität der Erdbahn ist damit auf zeitliche Größen zurückgeführt, die durch einfaches Zählen von Tagen zwischen den Jahreseckpunkten bestimmt werden können. In diesem ersten Beispiel wurde eine Verschiebung der Sonne aus der Kreismitte M entlang der Verbindungslinie der Sonnenwendpunkte angenommen. Wie berechnet sich die Exzentrizität im Fall einer beliebigen Verschiebung? Die Abbildung 5 zeigt den nun zu behandelnden Fall. Zunächst wird eine gerade Linie gezogen, die die Kreismitte mit der Sonne verbindet und bis an die Erdbahn heranreicht. Diese sog. *Apsidenlinie* markiert die Erdbahnpunkte des geringsten Sonnenabstandes – das *Perihel* P – und des größten

Sonnenabstandes – das *Aphel A*. Das rechtwinklige Kreuz der Jahreseckpunkte ist im allgemeinen gegen die Apsidenlinie um den Winkel θ verdreht. Gezählt werden die Länge der Halbjahre, also die zeitlichen Abstände zwischen dem Durchlaufen der Äquinoktialpunkte. Für die zeitliche Diskrepanz der zwei Halbjahre können wir deshalb nicht die volle Exzentrizität e verantwortlich machen, sondern nur jenen Anteil, der die Verlagerung der Sonne entlang der Linie zwischen den Sonnenwendpunkten beschreibt, also $e \cdot \cos \theta$. Für die Exzentrizität ergibt sich in diesem Fall:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{T_{\text{Winter}}}{T} \right)$$

Mit den heute gültigen Werten für $T = 365,25$ Tage, $T_{\text{Winter}} = 178,83$ Tage und $\theta = 13^\circ$ (dazu später mehr) bekommt man eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0,0335$. Ein erster Vergleich mit dem richtigen Wert von $e = 0,0167$ zeigt, dass die Hipparchische Exzentrizität der Erdbahn etwa doppelt so groß ist wie die Exzentrizität der tatsächlichen Keplerellipse.

Hipparch hatte die hier vorgeführte Möglichkeit der Überprüfung einer Theorie mit einer höheren Lehrbuchinstanz nicht. Wie kann man dann das Modell von Hipparch verwerfen? – Nur durch den Vergleich der beobachtbaren Konsequenzen des Modells mit der Wirklichkeit. Eine beobachtbare Konsequenz ist die variable Winkelgröße der Sonne im Laufe des Jahres. Gelänge es, diesen Wert experimentell zu bestimmen, ließe sich ein Vergleich mit der Wirklichkeit durchführen. Ohne Fernrohr hat man aber keine Chance, diesen nur leicht schwankenden Wert hinreichend genau zu messen. Heute ist das bereits mit einem Feldstecher im Schulunterricht möglich [7]. Die einzige schon im Altertum experimentell überprüfbare Vorhersage des Exzentermodells ist die präzise Abfolge der täglichen Sonnenstände im Tierkreis und damit die Winkelgeschwindigkeit in den einzelnen Zeichen. Bereits die Babylonier wussten ja um diese veränderliche Winkelgeschwindigkeit, die sie zur in ihrer Mondrechnung und Finsternisvorhersage durch einfache Modelle berücksichtigten. In einem späteren Abschnitt wird dies näher erläutert.

Ein verbessertes Modell mit Äquant

Ptolemäus führte um 150 n. Chr. mit dem sog. "Äquanten" eine Verbesserung in die antiken Planetentheorien ein. Mit seiner Hilfe lässt sich die Dynamik eines Planeten auf seiner Bahn genauer beschreiben und das Modell damit besser an die Wirklichkeit anpassen. Auf die Erdbahn (bzw. die Sonnenbahn in geozentrischer Sichtweise) hat er den Äquanten allerdings nicht angewendet. Er ging weiter von der Gültigkeit des einfachen Hipparchischen Exzentermodells für die Erdbahn aus, da es ihm nicht gelang, die variable Winkelgröße der Sonne mit einer zur Widerlegung des einfachen Modells hinreichenden Genauigkeit zu bestimmen.

Hier soll nun ein Erdbahnmodell mit Äquant diskutiert werden, obwohl es ein solches zur Zeit des Ptolemäus nicht gab. Es ist aber ganz im Geist der ptolemäischen Astronomie und als wichtiger Verbesserungsschritt auf dem Weg zur Keplerellipse von besonderem didaktischen Interesse. Es kann geradezu als Vorläufer für das zweite Kepler'sche Gesetz – den Flächensatz – angesehen werden.

Die Annahme Hipparchs, die Erde (resp. Sonne) laufe mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer exzentrischen Kreisbahn, wird nun aufgegeben. Stattdessen soll das Verhältnis der Halbjahreslängen dem Verhältnis der Flächen entsprechen, die während des jeweiligen Halbjahres von der Verbindungslinie Erde-Sonne überstrichen wird. Der Flächenstreifen der durch die beiden Bogenstücke der Länge e begrenzt wird, lässt sich durch ein Rechteck der Fläche $2ea$ annähern. Damit berechnet sich die Exzentrizität im Äquantenmodell zu:

$$\frac{A_{Winter}}{T_{Winter}} = \frac{A}{T} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2 - (\varepsilon \cdot a) \cdot (2a)}{T_{Winter}} = \frac{\pi \cdot a^2}{T}$$

⇔

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{T_{Winter}}{T} \right)$$

Berücksichtigt man auch hier eine Verdrehung der Sonnenwendlinie gegen die Apsidenlinie von 13° , so erhält man folgendes Endergebnis:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2 \cdot \cos \theta} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{T_{Winter}}{T} \right)$$

Damit erhält man mit $e = 0,0168$ ein Ergebnis, das nur unwesentlich vom Literaturwert abweicht. Diese Art des Vergleichs mit dem Literaturwert, die heute im naturwissenschaftlichen Unterricht gerne als abschließender Prüfstein für die eigenen Fähigkeiten genommen wird, hatten die antiken Forscher nicht. Freie Parameter eines Modells wie e und θ mussten so angepasst werden, bis das Modell die astronomische Wirklichkeit möglichst gut wiedergab. Die Verdrehung der Apsidenlinie gegen die Solsticiallinie z.B. lag damals bei 24° , nicht bei 13° wie heutzutage. Ptolemäus erkannte die Veränderlichkeit dieser Größe damals noch nicht [8].

Die Dynamik der Umlaufbewegung, die im Hipparch'schen Modell noch dergestalt eingerichtet war, dass ein in der Kreismitte M postierter hypothetischer Beobachter in gleichen Zeitabständen ein gleiches Vorrücken der Erde auf ihrer Bahn feststellte, der Kreis also mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wurde, ist in diesem Äquantenmodell entscheidend abgeändert. Nicht die Kreismitte ist nunmehr das Zentrum der Dynamik und der zeitlichen Symmetrie der Umlaufsbewegung, sondern ein neu geschaffener „punctum aequans“ (oder eben "Äquant") auf der Apsidenlinie, der gegen die Kreismitte um einen Wert e_2 verschoben ist. Die Exzentrizität des Äquanten (e_2) und die der Sonne (e_1) müssen nicht notwendigerweise gleich groß sein, es stellt sich aber heraus, dass mit identischen Werten für e_1 und e_2 zumindest der Erdumlauf sehr gut beschrieben werden kann (Abb. 6). Von diesem neu geschaffenen Äquantenpunkt erscheint die Umlaufsbewegung gleichförmig, daher auch der Name. Dieser abstrakte Symmetriepunkt kann zumindest für sehr kleine Exzentrizitäten mit dem leeren Fokus der Kepler-Ellipse verglichen werden.

Mit der Hypothese eines solchen dynamischen Symmetriepunktes, die sich glänzend bewährt, lässt sich die tägliche Position der Erde auf ihrer Bahn und damit der tägliche Stand der Sonne im Tierkreis geometrisch oder rechnerisch ermitteln. Die Abbildung 7 verdeutlicht die Vorgehensweise. Ausgehend vom Äquantenpunkt verlaufen 36 radiale Strahlen im gleichen Winkelabstand bis an die Erdbahn. Die Schnittpunkte markieren den Erdort nach jeweils $365,25 / 36$ Tagen nach Durchlaufen des Perihels P . Von der Sonnenposition S beobachtet ist in den jeweils gleichgroßen Zeitabständen immer ein unterschiedlich großes Teilstück der Erdbahn durchlaufen worden. In Abbildung 8 sind jeweils drei dieser etwa zehntägigen Zeitabschnitte zu zusammengefasst, so dass sich eine Teilung in 12 ungleich lange aber in gleicher Zeit durchlaufene Teilstücke ergibt. Ein Beobachter auf der Erde sieht die Sonne mit eben dieser irdischen Winkelgeschwindigkeit durch den Tierkreis wandern. Verzichtet man auf die Darstellung der vom Äquanten ausgehenden Radialstrahlen, so kommt man schließlich zur Abbildung 9, die schon sehr an die bekannten Schaubilder zur Erläuterung des Kepler'schen Flächensatzes erinnert: In gleichen Zeiten durchläuft die Erde im Perihel ein größeres Teilstück ihrer Bahn als im Aphel A .

Der Äquant als gedachter Beobachtungsstand eines gleichmäßigen Umlaufs der Erde um die Sonne ist zwar kein realer Punkt am Himmel, man kann dennoch versuchen, sich ihn in Relation zur Sonne, z.B. wenn die Sonne am Mittag im Süden steht, zu denken. Abbildung 6 z.B. zeigt uns ja, wo wir ihn zu suchen haben. Er ist maximal um die Winkeldistanz 2ε

entlang des Tierkreises gegen die Sonne verschoben. Einige Wochen nach dem Frühlingsäquinoktium „sehen“ wir senkrecht auf diesen Strecke und erblicken den vollen Abstand $2e$ unter einem Winkel $2\varepsilon = 1,95^\circ$. Die Sonne misst etwa ein halbes Grad im Winkeldurchmesser. Der Äquant steht deshalb um diese Jahreszeit in den Mittagsstunden etwa vier Sonnenscheiben rechts der Sonne. Im Hochsommer, im Aphel, steht er vor der Sonne, im Herbst vier Sonnenscheiben links der Sonne und im Winter, etwa zu Neujahr ist er hinter der Sonne verborgen.

Im Frühjahr kulminiert der Äquant etwa 8 Minuten (entspricht 2°) vor der Sonne, im Herbst 8 Minuten nach der Sonne. Dies sind etwaige Zeitspannen, die dem Sonnenuhrfreund vertraut sind, wenn er die Wahre Ortszeit (WOZ), die die Sonnenuhr anzeigt, mit Hilfe der „Zeitgleichung“ in die bürgerliche Mittlere Ortszeit (MOZ) umwandelt.

Wäre die Erdbahn ein Kreis mit der Sonne in der Kreismitte, so fiel ihr Ort mit dem des Äquanten zusammen (bei $e_1 = e_2$). Dann wäre der tatsächliche Sonnenort auch der Ort der zeitlichen Symmetrie und eine Unterscheidung in eine mittlere Sonne, in der diese zeitliche Symmetrie zum Ausdruck kommt, und eine wahre Sonne wäre zumindest bezüglich dieses Effektes, nämlich des Umlaufphänomens auf der Ekliptik, hinfällig. Diese nicht ganz streng ausgeführten Überlegungen mögen verdeutlichen, dass der sichtbare Winkelabstand zwischen Äquant und Sonne einem zeitlichen Abstand zwischen der wahren und mittleren Sonne nahe kommt, der als einer von zwei Anteilen Eingang in die Zeitgleichung findet.

Die Berechnung der Zeitgleichung

Dieser erste Anteil A_1 der Zeitgleichung, der Effekt des ungleichförmigen Umlaufs, lässt sich mit dem Äquantenmodell in guter Näherung schnell bestimmen. Genommen wird der im Laufe des Jahres von der Erde sichtbare Anteil der Strecke $2e$ im Zeitmaß. Der sichtbare Anteil variiert sinusförmig mit einer Periode von 365,25 Tagen nach dem Periheldurchgang.

$$A_1 = 2 \cdot \varepsilon \cdot \sin \lambda_p \approx 8 \text{ min} \cdot \sin \lambda_p$$

Darin ist λ_p der seit dem letzten Periheldurchgang vom Planeten überstrichene Winkel. Nach dem Periheldurchgang ist der exzentrisch laufende Planet gegenüber einem gleichmäßig wandernden voraus, im Aphel sind beide gleichauf, nach dem Aphel hinkt der exzentrische hinterher, bis er beim erneuten Periheldurchgang den gleichförmig bewegten wieder eingeholt hat. Die wahre Sonne ist demnach der mittleren Sonne um $2 \cdot \varepsilon \cdot \sin \lambda_p$ voraus. Weil die Exzentrizität der Erdbahn klein ist, lässt sich λ_p durch den Winkel annähern, den die mittlere Sonne in der selben Zeit zurückgelegt hat, nämlich $(360^\circ / 365,25d) \cdot d_p$, mit $d - d_p$ als der Anzahl der seit dem Periheldurchgang verstrichenen Tage (d ist die laufende Nummer des Tages im Jahr; die Tagesnummer des Periheldurchgangs ist in heutiger Zeit $d_p = 3$).

Der zweite Anteil zur Zeitgleichung beruht auf der Neigung der Ekliptik gegen die Äquatorebene. Das jährliche Fortschreiten einer auf der Ekliptik gleichmäßig wandernden Sonne ist nicht gleichbedeutend mit von Tag zu Tag gleichbleibenden Rektaszensionschritten entlang der Äquatorebene (Abb. 3). In der Nähe der Äquinoktien nimmt die Sonne rasch an Deklination zu oder ab, während ihre Veränderung in Rektaszension dort geringer ist als um die Solstizien, wenn die Ekliptik den Deklinationskreis mit der Deklination $\pm 23,43^\circ$ tangiert. Um die Äquinoktien verliert die Rektaszension der Sonne das Wettrennen gegen die ekliptische Länge. Bei hohen Deklinationen vor den Solstizien holt sie die eingebüßten Rektaszensionsteile wieder auf, weil sie in größerer Polnähe die Deklinationskreise in rascherer Folge überschneidet als in Äquatornähe und so bis zum Solstiz den Rückstand in Rektaszension gegen die ekliptische Länge wieder wettmacht. Die Folge dieser Schiefelage der Ekliptik ist somit ein Vor- oder Zurückbleiben der wahren Sonne gegen den Rektaszensionswert einer gedachten Sonne, die gleichmäßig in der Äquatorebene wandert.

Beide Effekte, der Schiefstellungs- oder Inklinationsanteil und der Anteil des ungleichmäßigen Sonnenlaufs, überlagern sich zur charakteristischen Zeitgleichung. Der Exzentrizitätsanteil A_1 wurde bereits behandelt, nun folgt eine Betrachtung für den Effekt der Inklination A_2 . Die Zeitgleichung ZGL ist die Summe aus A_1 und A_2 .

Der Inklinationsanteil ist die im Zeitmaß angegebene Differenz zwischen der ekliptischen Länge und der Rektaszension der Sonne. Mit dem negativen Vorzeichen für A_2 und dem positiven für A_1 folgen wir der üblichen Konvention. Das relative Vorzeichen von A_1 und A_2 ist natürlich nicht konventionsabhängig, sondern Ausdruck der natürlichen Verhältnisse.

$$A_2 = -(\lambda - \alpha)$$

Die sphärische Geometrie liefert folgenden Zusammenhang zwischen der ekliptischen Länge der Sonne und ihrer Rektaszension (siehe auch Abb. 3):

$$\tan \alpha = \cos \varepsilon \cdot \tan \lambda$$

⇔

$$\alpha = \tan^{-1}(\cos \varepsilon \cdot \tan \lambda)$$

Eingesetzt in A_2 ergibt sich:

$$A_2 = -(\lambda - \alpha) = -(\lambda - \tan^{-1}(\cos \varepsilon \cdot \tan \lambda))$$

Dieser Ausdruck gibt den Inklinationsanteil in Radiant. Bei der Umwandlung ins Zeitmaß ist er mit $1440 \text{min} / 2\pi$ zu multiplizieren. Der komplizierte algebraische Ausdruck lässt sich nun näherungsweise in eine Sinusfunktion mit der Periode der halben Jahreslänge umwandeln. Die Amplitude erhält man durch Ableiten nach λ und Nullsetzen (Extremalwertbestimmung).

$$A_2 = -\frac{1440 \text{min}}{2\pi} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \tan^{-1}(\sqrt{\cos \varepsilon}) \right)}_{0,043} \cdot \sin\left(2 \cdot 360^\circ \cdot \frac{d - d_0}{365,25} \right)$$

$$A_2 \approx -10 \text{min} \cdot \sin\left(2 \cdot 360^\circ \cdot \frac{d - d_0}{365,25} \right)$$

In diesem Ausdruck bezeichnet d die laufende Nummer des Tages im Jahr seit Jahresanfang und d_0 die Tagesnummer des Äquinoktiums. Der Startzeitpunkt für diese genäherte Sinusfunktion ist das Frühlingsäquinoktium. Dieses liegt zumeist auf dem 21. März, so dass $d_0 = 81$ ist.

Die rechnerische Auswertung der Arkustangensfunktion erweist sich als nicht trivial und ungeeignet für den einführenden Unterricht. Deshalb sollte eine zeichnerische Auftragung des Ausdrucks für A_1 die mathematische Betrachtung ergänzen oder sogar ersetzen. In Abbildung 10 sieht man sogleich die große Verwandtschaft des exakten Ausdrucks für A_1 (roter Strich) mit einer Sinusfunktion der Periode $365,25/2$ Tage und einer Amplitude von etwa 10 Minuten (blauer Strich).

Die beiden Anteile der Zeitgleichung A_1 und A_2 sind in der Abbildung 11 getrennt aufgetragen. Durch Addition erhält man die bekannte Zeitgleichungskurve der Abbildung 12, die schließlich durch die folgende Näherungsformel mit etwa Minutengenauigkeit gewonnen wird:

$$ZGL = A_1 + A_2 = 8 \text{min} \cdot \sin\left(360^\circ \cdot \frac{d - d_p}{365,25} \right) - 10 \text{min} \cdot \sin\left(2 \cdot 360^\circ \cdot \frac{d - d_0}{365,25} \right)$$

Bei negativen Werten geht die Sonnenuhr nach und bei positiven vor, wenn die mittlere Ortszeit als Vergleichsmaßstab gewählt wird.

Einige Punkte, die mit dieser Formel berechnet wurden, sind in das Diagramm der Zeitgleichung, entnommen aus [9], eingetragen (Abb. 13). Als Parameter, die durch die Anpassung dieser Funktion an Beobachtungsdaten bestimmt werden müssen, sind darin enthalten: Die Länge des tropischen Jahres, der zeitliche Abstand zwischen dem Frühlingsäquinoktium und dem Periheldurchgang und die Exzentrizität der Erdbahn. Die Jahreslänge ist durch die oben bereits beschriebenen Gnomon-Messungen bekannt, ebenso der Kalendertag des Frühlingsäquinoktiums. Der Kalendertag des Periheldurchgangs lässt

sich durch die Phasenverschiebung der beiden Anteile gegeneinander bestimmen. Er liegt heute bei 13 Tagen, was einem Unterschied von ca. 13° entlang der Ekliptik entspricht. Diesen Wert hatten wir oben bei einer zwischenzeitlichen Auswertung des Hipparch'schen Exzentermodells bereits ohne Erläuterung seiner Herkunft eingesetzt. Hier erfährt er seine Rechtfertigung auf der Basis des Beobachtungsmaterials.

Die Zeitgleichung, bzw. die darin eingehenden Effekte der variablen Sonnengeschwindigkeit und der Schiefstellung der Erdachse waren bereits im Altertum bekannt, wenn auch nicht in der uns heute bekannten Darstellungsform. Sie kann mit einem Gnomon bestimmt werden, wenn man den täglichen Meridiandurchgang der wahren Sonne mit dem der mittleren Sonne vergleicht. Dazu benötigt man eine Uhr, die einem alltäglich einen exakten Zeitpunkt angibt, der um genau 24 Stunden später liegt als der entsprechende Zeitpunkt des Vortages. Große Wasseruhren, die solche Zeitspannen wie den Tag, den halben Tag oder die Länge der Nacht abmaßen, sind bereits bei den Babyloniern in Gebrauch gewesen und durch schriftliche Quellen belegt. Ihre Genauigkeit wird aber nicht besser als einige Minuten gewesen sein, denn nirgends findet man systematische Beobachtungsprotokolle, in denen die Ereignisse mit einem feinerem Zeitquantum terminiert ist.

Ephemeridenrechnung auf der Basis der Exzentermodelle

Nachdem die babylonische und griechische Vorstellung über den Sonnenlauf bzw. die Gestalt und Bahndynamik des Erdumlaufs nun begründet sind, kann die variable Sonnengeschwindigkeit im Rahmen dieser Modelle abgeleitet werden. Allein die Konfrontation von Theorie und Experiment hinsichtlich dieser Aussage verspricht Aussicht auf einen wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn.

Die freien Parameter e und θ wurden unter Verwendung der Beobachtungsdaten der Gnomonmessungen an das Exzentermodell angepasst. Damit scheiden diese Daten nun ihrerseits zur Prüfung der Güte der Modelle aus. Nur die genauere Betrachtung der Bahndynamik kann hier noch weiterhelfen. Wie aber bestimmte man zur Zeit des Ptolemäus die tägliche Position der Sonne auf der Ekliptik? - Sie lässt sich z.B. mit Beobachtungen an einer drehbaren Armillarsphäre mit Tierkreisring gewinnen (Abb. 14). Die exakt äquatorial justierte Sphäre wird solange gedreht, bis der Ekliptikring einen Schatten in die Mitte wirft. Dann stehen die Mitte des Instruments, die Sonne und die Stelle des Ekliptikrings, die den momentanen Sonnenstand anzeigt, in Reihe. Die Stellung der Sonne im Tierkreis kann dann am Teilkreis des Ekliptikrings abgelesen werden. Auf diese Weise gewann Ptolemaios seine Beobachtungsdaten der Sonnenlänge. Im Almagest ist sein Astrolabium genau beschrieben und ein moderner Nachbau dieses Instruments basiert auf dieser Beschreibung [10].

Ob von Hipparch ebenfalls Messungen dieser Art durchgeführt wurden, ist nicht bekannt. Hipparch griff oft auf die Erkenntnisse der babylonischen Astronomie zurück. Vermutlich hat er durch sein geometrisches Modell die arithmetischen babylonischen Modelle zur Beschreibung der variablen Sonnengeschwindigkeit zu ersetzen versucht und sich dabei auf die Daten der Babylonier gestützt. Diese Daten, die uns durch erhaltene Keilschrifttäfelchen überliefert sind, werden in der folgenden Tabelle aufgelistet. Sie ist aus [11] entnommen und basiert auf einer Rekonstruktion von O. Neugebauer.

Die Umlaufgeschwindigkeit der Sonne auf der Ekliptik nach Neugebauer 1955
Rekonstruktion nach Abschnitt 8 der Tafel BM 32651 aus Babylon, Seleukidenzeit

Zwillinge:	$0^\circ 55' 32''$ pro Tag
Stier und Krebs:	$0^\circ 56' 44''$
Widder und Löwe:	$0^\circ 57' 56''$
Fisch und Jungfrau:	$0^\circ 59' 8''$
Wassermann und Waage:	$1^\circ 0' 20''$
Steinbock und Skorpion:	$1^\circ 1' 32''$
Schütze:	$1^\circ 3' 44''$

Der damalige Frühlingspunkt lag beim 10. Grad des Widders. Die Angaben bezeichnen die Sonnengeschwindigkeit vom 10. Grad eines Zeichens bis zum 10. Grad des Folgezeichens.

Wie groß sind diese Sonnengeschwindigkeiten in den einzelnen Zeichen im Hipparchischen Exzentermodell? - Zur Beantwortung dieser entscheidenden Frage ist die Berechnung der Zeitspannen erforderlich, die für den Lauf der Sonne durch ein jedes Zeichen benötigt werden. Das geometrische Problem, welches dazu zu lösen ist, ist in der Abbildung 15 aufgezeichnet. Nach dem Periheldurchgang P hat die Erde bis zum eingezeichneten Standort E auf ihrer Bahn den Winkel λ_p zurückgelegt. Im Exzentermodell von Hipparch läuft die Erde gleichmäßig auf dem exzentrischen Kreis. Der Winkel t zwischen den Linien MP und ME wächst also gleichmäßig mit der Zeit. Die Strecke SE ist der Abstand Erde-Sonne, der hier mit s bezeichnet wird. Die Strecke ME ist der Radius des exzentrischen Kreises, der in Unkenntnis der Abstände im Planetensystem zu 1 gesetzt wird. Damit ist $\varepsilon = e$. Gesucht ist eine Beziehung, die für die bekannten λ_p der Eintrittspunkte der Tierkreiszeichen den Winkel t , also die Zeitabstände seit dem letzten Periheldurchgang, liefert. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\sin t = p$$

$$\sin \lambda_p = \frac{p}{s}$$

Das Auflösen beider Formeln nach p und anschließendes Gleichsetzen liefert:

$$\sin t = s \cdot \sin \lambda_p$$

Dies ist die gesuchte Beziehung, die im Wesentlichen auf der zeitlich variablen Sonnenentfernung beruht. Die Sonnenentfernung s erhält man durch Auswertung des in Abbildung 15 farbig gemalten Dreiecks SME mit dem Kosinussatz. Es gilt:

$$1 = e^2 + s^2 - 2es \cdot \cos(180^\circ - \lambda_p)$$

\Leftrightarrow

$$1 = e^2 + s^2 + 2es \cdot \cos \lambda_p$$

Diese quadratische Gleichung liefert für den Sonnenabstand s zwei Lösungen:

$$s = -e \cdot \cos \lambda_p \pm \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \lambda_p}$$

Nur die Lösung, die einen positiven Sonnenabstand ergibt, ist sinnvoll. Weil die Exzentrizität e sehr klein ist, betrachten wir nur die erste Näherung mit Termen linear in e und vernachlässigen alle Terme mit den Ordnungen e^2 oder höher:

$$s \approx 1 - e \cdot \cos \lambda_p$$

Damit erhält man folgendes Endergebnis:

$$\sin t \approx (1 - e \cdot \cos \lambda_p) \cdot \sin \lambda_p$$

Mit dieser Beziehung berechnen wir nun für die Anfangsorte der Zeichen den Winkel t und die Anzahl der Tage, die seit dem Periheldurchgang verstrichen sind. Alle Zwischenergebnisse sind in der folgenden Tabelle systematisch zusammengestellt. Für das angegebene Zeichen wird zunächst der Winkel λ_p bestimmt (2. Spalte). Es ist zu beachten, dass λ_p beim Periheldurchgang beginnt, welcher 13 Tage nach der Wintersonnenwende stattfindet. Der Winkel θ ist also mit guter Genauigkeit 13° . Die Rechnung wird also aus didaktischen Gründen für die heutigen Verhältnisse durchgeführt. Die wesentlichen Aussagen beim Vergleich mit den babylonischen Werten bleiben davon aber unberührt.

In der dritten Spalte ist die Sonnenentfernung s eingetragen. Spalte 4 gibt den Zeitwinkel t nach der oben abgeleiteten Formel und Spalte 5 gibt die zugehörige Zeitspanne in Tagen nach $T = t \cdot 365,25d / 360^\circ$. Später werden wir diesen Winkel als *mittlere Anomalie* M auch bei der Behandlung der Bahndynamik auf der Keplerellipse wiederfinden. Weil zum Vergleich mit den babylonischen Werten die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeichen gesucht ist, gibt Spalte 6 die Zeitspanne ΔT zwischen dem Eintritt der Sonne in benachbarte Zeichen. Die letzte Spalte schließlich enthält das Endergebnis für die mittlere Sonnengeschwindigkeit $30^\circ / \Delta T$ in den einzelnen Zeichen in Grad und Bogenminuten pro Tag.

Die Umlaufgeschwindigkeit der Sonne auf der Ekliptik nach Hipparch's Exzentermodell, $e = 0,0335$

Zeichen	λ_p [°]	s	t [°]	T [d]	ΔT [d]	$30^\circ/\Delta T$
Wassermann:	17°	0,968	16,44	16,68	29,60	1° 1′
Fische:	47°	0,977	45,61	46,28	30,06	1° 0′
Widder:	77°	0,992	75,25	76,34	30,25	1° 0′
Stier:	107°	1,010	105,06	106,59	31,07	1° 0′
Zwillinge:	137°	1,025	135,68	137,66	31,34	0° 57′
Krebs:	167°	1,033	166,57	169,00	31,44	0° 57′
Löwe:	197°	1,032	197,56	200,44	31,31	0° 57′
Jungfrau:	227°	1,023	228,42	231,75	31,05	0° 58′
Waage:	257°	1,008	259,03	262,80	30,16	1° 0′
Skorpion:	287°	0,990	288,75	292,96	29,98	1° 0′
Schütze:	317°	0,975	318,30	322,94	29,56	1° 1′
Steinbock:	347°	0,967	347,43	352,50	29,43	1° 1′

Eine entsprechende Tabelle soll nun auch für das Exzentermodell mit Äquant berechnet werden. Zunächst wird wieder die fundamentale Beziehung zwischen t und λ_p hergeleitet. Die geometrische Konstruktion, die ausgewertet werden muss, ist in Abbildung 16 zu sehen. Der wesentliche Unterschied zur Abbildung 15 ist im Äquanten, dem neuen Zentrum des zeitlichen Gleichlaufs, zu finden. Damit gestaltet sich die trigonometrische Rechnung ein wenig aufwendiger als im Falle des einfachen Exzentermodells. Man findet für t und λ_p jetzt folgende Beziehungen mit $s_{\bar{A}}$ als Entfernung des Äquanten von der Erde:

$$\sin t = \frac{p}{s_{\bar{A}}}$$

$$\sin \lambda_p = \frac{p}{s}$$

Erneutes Umformen dieser Gleichungen nach p und Gleichsetzen liefert:

$$\sin t = \frac{s}{s_{\bar{A}}} \cdot \sin \lambda_p$$

neben der weiterhin gültigen Beziehung $s \approx 1 - e \cdot \cos \lambda_p$ ist nun noch ein Ausdruck für die Äquantenentfernung $s_{\bar{A}}$ herzuleiten. Dies geschieht durch die Auswertung des in Abbildung 16 farbig gemalten Dreiecks MÄE mit dem Kosinussatz. Es gilt:

$$1 = e^2 + s_{\bar{A}}^2 - 2es_{\bar{A}} \cdot \cos t$$

Diese quadratische Gleichung liefert für den Äquantenabstand zwei Lösungen, von der nur die positive sinnvoll ist:

$$s_{\bar{A}} = e \cdot \cos t \pm \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 t} \approx 1 + e \cdot \cos t$$

Der Wurzelausdruck wurde durch die Vernachlässigung der Terme in e^2 wieder vereinfacht. Bedenkt man, dass bei kleiner Exzentrizität der Winkel t sich kaum vom Winkel λ_p unterscheidet, und dieser Unterschied durch die Anwendung der Kosinusfunktion sich weiter mildert, ist in erster Näherung das Gleichsetzen von t und λ_p gerechtfertigt:

$$s_{\bar{A}} \approx 1 + e \cdot \cos t \approx 1 + e \cdot \cos \lambda_p$$

Ein erneuter Blick auf die Abbildung 16 zeigt das Wesen dieser Näherungen. Bei $\lambda_p = 0$ reduziert sich s um e von 1, während $s_{\bar{A}}$ um e vergrößert wird. Bei $\lambda_p = 180^\circ$ kehren sich diese Verhältnisse um und bei $\lambda_p = 90^\circ$ und 270° wird der Kosinus zu Null und s und $s_{\bar{A}}$ werden näherungsweise zu 1. Schließlich erhält man das Endergebnis:

$$\sin t = \frac{s}{s_{\bar{A}}} \cdot \sin \lambda_p \approx \frac{(1 - e \cdot \cos \lambda_p)}{(1 + e \cdot \cos \lambda_p)} \cdot \sin \lambda_p$$

Einer Berechnung der Tabellenwerte steht nun nichts mehr entgegen. Sie geschieht nach dem gleichen Muster wie zuvor beim einfachen Exzentermodell, jedoch ist der jeweilige Wert für $s_{\bar{A}}$ in die Tabelle mit aufgenommen.

Die Umlaufgeschwindigkeit der Sonne auf der Ekliptik nach Ptolemaios' Äquantenmodell, $e = 0,0168$

Zeichen	$\lambda_p [^\circ]$	s	$s_{\bar{A}}$	t [°]	T [d]	ΔT [d]	$30^\circ/\Delta T$
Wassermann:	17°	0,984	1,016	16,45	16,69	29,66	1° 1'
Fische:	47°	0,989	1,011	45,68	46,35	29,90	1° 0'
Widder:	77°	0,996	1,004	75,15	76,25	30,28	0° 59'
Stier:	107°	1,005	0,995	105,00	106,53	31,08	0° 58'
Zwillinge:	137°	1,013	0,988	135,63	137,61	31,39	0° 57'
Krebs:	167°	1,016	0,984	166,57	169,00	31,45	0° 57'
Löwe:	197°	1,016	0,984	197,57	200,45	31,27	0° 58'
Jungfrau:	227°	1,011	0,989	228,39	231,72	31,23	0° 58'
Waage:	257°	1,004	0,996	259,17	262,95	30,04	1° 0'
Skorpion:	287°	0,995	1,005	288,78	292,99	29,96	1° 0'
Schütze:	317°	0,988	1,013	318,31	322,95	29,53	1° 1'
Steinbock:	347°	0,984	1,016	347,42	352,48	29,46	1° 1'

Die Erdbahn als Keplerellipse

In diesem Abschnitt soll die Verwandtschaft des Äquantenmodells zur Keplerellipse gezeigt werden. Wie man seit Kepler weiß, laufen die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Der Nachweis der elliptischen Planetenbahn gelang Kepler aber nicht am Beispiel der Erdbahn, deren Exzentrizität so klein ist, dass zu Zeiten der fernrohrlosen Positionsastonomie Keplers mit der Genauigkeitsgrenze der visuellen Beobachtung von 1' eine Abweichung der Erdbahn von einem exzentrisch gelagerten Kreis nicht nachweisbar war. Kepler verallgemeinerte seine Erkenntnisse über den Marslauf auf die Bahnen der anderen Planeten und auf die Erdbahn. Für die Erdbahn allein genommen hätte das Äquantenmodell gleich gute Dienste geleistet, wie nun mit ein wenig Mathematik gezeigt wird.

Eine Ellipse wird von den Radiusstrahlen r_1 und r_2 , die von den zwei Brennpunkten F_1 und F_2 ausgehen, beschrieben, wenn die Summe $r_1 + r_2$ beim Umlauf konstant bleibt (Abb. 17). Im symmetrischen Fall $r_1 = r_2$ haben die Radiusstrahlen die Länge der großen Halbachse a . Die Mitte der Ellipse liegt auf halbem Weg zwischen den zwei Brennpunkten F_1 und F_2 . Diese Strecke wird als $2e$ bezeichnet mit e als linearer Exzentrizität. Weiterhin gilt nach dem pythagoräischen Lehrsatz $e^2 + b^2 = a^2$. Darin beschreibt b die kleine Halbachse der Ellipse. Die Ellipse wird folglich durch die zwei Halbachsen a und b vollständig beschrieben. Weiterhin definiert man die numerische Exzentrizität mit $\varepsilon = e/a$.

Nach dem 1. Kepler'schen Gesetz steht die Sonne in einem Brennpunkt - nicht im Mittelpunkt! - der ellipsenförmigen Planetenbahnen. Die Bahngeschwindigkeit eines Planeten verändert sich ständig. Im Perihel, dem sonnennächsten Punkt, erreicht sie ein Maximum, im Aphel, der Sonnenferne, ein Minimum. Der Radiusstrahl Sonne-Planet überstreicht aber in gleichen Zeiten gleiche Flächen; dies ist die Aussage des 2. Keplerschen Gesetzes. Die ganze Ellipsenfläche $A = \pi ab$ wird in der Umlaufzeit T überstrichen.

Zweckmäßig zur Beschreibung der zeitlichen Abfolge der Planetenörter sind die Polarkoordinaten r und ϕ . Der Winkel ϕ wird vom Perihel gerechnet und trägt die klassische Bezeichnung *wahre Anomalie*. Mit Hilfe des Flächensatzes lässt sich die zeitliche Entwicklung der wahren Anomalie ermitteln, eine für jede Ephemeridenrechnung unerlässliche Aufgabe.

Das Problem der zeitlichen Entwicklung der wahren Anomalie ϕ ist damit auf die Bestimmung der Zeitentwicklung von E , der sogenannten *exzentrischen Anomalie*, umgeschichtet. Die seit dem Periheldurchgang in Abbildung 18 überstrichene Fläche SPE ist nach dem Flächensatz der Bruchteil t/T der Ellipsenfläche πab . Sie lässt sich aber auch mit der Fläche des bis zum Hilfskreis aufgeblähten krummlinigen Dreiecks SPE' in Beziehung setzen, da die Ellipse ein um den Faktor b/a gestauchter Kreis ist. Dieses Flächenstück des

Hilfskreises errechnet sich auch aus der Differenz der Flächen MPE' und MSE' . Insgesamt also:

$$(F(MPE') - F(MSE')) \cdot \frac{b}{a} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T}$$

\Leftrightarrow

$$\left(\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} e a \sin E \right) \cdot \frac{b}{a} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T}$$

\Leftrightarrow

$$E - \varepsilon \cdot \sin E = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = M$$

Dies ist die sog. *Keplergleichung*, die eine Bestimmung der exzentrischen Anomalie E für eine Zeit t nach dem letzten Periheldurchgang ermöglicht. Die rechte Seite der Gleichung wird durch M abgekürzt und als *mittlere Anomalie* bezeichnet. Will man eine Planetenposition zur Zeit t auf der bekannten Ellipsenbahn berechnen, ist zunächst die mittlere Anomalie zu bestimmen und daraus mit Hilfe der Keplergleichung die exzentrische Anomalie E , was wiederum die Berechnung der wahren Anomalie ϕ ermöglicht, wenn eine Beziehung zwischen E und ϕ gefunden wird.

Diese Beziehung gewinnt man durch geschicktes Kombinieren von $\sin E$, $\cos E$ und \tan . Der Abbildung 18 entnimmt man:

$$\sin E = \frac{H}{a}$$

$$\cos E = \frac{G}{a}$$

$$\tan \phi = \frac{\frac{b}{a} \cdot H}{G - e} = \frac{b \cdot \sin E}{a \cdot \cos E - e}$$

Durch Auswertung der Abbildung 18 bzw. durch trigonometrische Umformungen erhält man auch die folgenden gebräuchlicheren Beziehungen:

$$\cos \phi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}, \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{1 - e \cdot \cos E} \quad \text{bzw.} \quad \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

Nun gelingt die Bestimmung der Radialkoordinate nach der Polarkoordinatendarstellung der Ellipse mit dem Ursprung im Brennpunkt (aus der mathematischen Formelsammlung):

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

Die Keplergleichung, die das zentrale Element in dieser Berechnungskette ist, lässt sich nicht analytisch lösen. Zur Bestimmung von E müssen numerische Verfahren oder Näherungsverfahren herangezogen werden. Ist die Exzentrizität der Planetenbahn klein, so wird sich E nicht wesentlich von M unterscheiden, und es lässt sich mit folgender Vereinfachung weiterarbeiten, die nur lineare Terme in e berücksichtigt.

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin E \approx M + \varepsilon \cdot \sin M$$

\Leftrightarrow

$$E - M \approx \varepsilon \cdot \sin M$$

Für die Berechnung der ekliptischen Längen ist der Unterschied zwischen der wahren Anomalie ϕ und der mittleren Anomalie M interessant. Dieser Unterschied gibt an, wie die wahre Bewegung des Planeten vom Gleichmaß der mittleren Bewegung abweicht. Diese Differenz $\phi - M$ wird als *Mittelpunktsgleichung* bezeichnet. In erster Ordnung in e soll sie nun bestimmt werden. Mit der Polarkoordinatendarstellung der Ellipse und $r \cdot \cos \varphi = a \cdot (\cos E - e)$ (siehe Abb. 18) folgt:

$$\cos \phi = \frac{(\cos E - e) \cdot (1 + \cos \phi)}{1 - e^2} \approx \cos E - e \cdot (1 + \cos \phi \cdot \cos E)$$

Ersetzt man wieder $\cos \varphi$ durch $\cos E$ gelangt man zu

$$\cos \varphi \approx \cos E - (\varepsilon \cdot \sin E) \cdot \sin E,$$

das mit der Reihenentwicklung des Kosinus verglichen werden kann:

$$\cos(x + \Delta x) \approx \cos x - \Delta x \cdot \sin x$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man $x = E$, $\Delta x = (\varphi - E) = \varepsilon \cdot \sin E$

Mit der Darstellung der Mittelpunktsgleichung in der Form $\varphi - M = (\varphi - E) + (E - M)$ erhält man schließlich

$$\varphi - M = \varepsilon \cdot \sin E + \varepsilon \cdot \sin M \approx 2\varepsilon \cdot \sin M$$

Damit gelangt man für die ekliptische Länge λ_p zum folgenden Endergebnis (1. Näherung):

$$\lambda_p = \varphi = M + 2\varepsilon \cdot \sin M$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_p = \lambda_0 + M + 2\varepsilon \cdot \sin M$$

Weil die ekliptische Länge λ vom Frühlingspunkt an gezählt wird, ist zur Länge λ_p , die vom Planet seit dem letzten Periheldurchgang überstrichen wurde, noch der Winkelabstand λ_0 des Perihels vom Frühlingspunkt hinzuzuzählen.

Vergleich aller Modelle und Schlußfolgerung

Läßt sich die Berechnung von λ_p , also der wahren Anomalie, im Äquantenmodell aus der Kepler'schen Ephemeridenrechnung ableiten? Das Ergebnis für λ_p im Äquantenmodell lautete:

$$\sin \lambda_p \approx \left(\frac{1 + e \cdot \cos \lambda_p}{1 - e \cdot \cos \lambda_p} \right) \cdot \sin t \approx \left(\frac{1 + e \cdot \cos t}{1 - e \cdot \cos t} \right) \cdot \sin t$$

Der gleichmäßig anwachsende Zeitwinkel t des Äquantenmodells entspricht der mittleren Anomalie M der Keplerbewegung. Diese zwei Winkel sind Bezeichnungen für den gleichen Sachverhalt und sie werden hier synonym verwendet.

Die entsprechende Formel im Keplermodell lautet dagegen (in 1. Näherung):

$$\lambda_p \approx M + 2e \cdot \sin M$$

Wendet man auf diese Gleichung die Sinusfunktion an, entwickelt den Sinus um M und bricht nach der 1. Ordnung in M ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin \lambda_p &\cong \sin(M + 2e \cdot \sin M) \approx \sin M + (2e \cdot \sin M) \cdot \frac{\partial}{\partial M} \sin M = \sin M + (2e \cdot \sin M) \cdot \cos M \\ &\cong \sin M (1 + 2e \cdot \cos M) \end{aligned}$$

Dies lässt sich mit folgender Entwicklung weiter umformen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \gamma} &= 1 + \gamma + O(\gamma^2) \approx 1 + \gamma \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \gamma)}{(1 - \gamma)} &\approx (1 + \gamma)^2 \end{aligned}$$

Mit $\gamma = e \cdot \cos M$ erhält man:

$$\frac{(1 + e \cdot \cos M)}{(1 - e \cdot \cos M)} \approx (1 + e \cdot \cos M)^2 = 1 + 2e \cdot \cos M + O(M^2)$$

Diese Näherung eingesetzt in die Formel für $\sin \lambda_p$ führt auf das Ergebnis:

$$\sin \lambda_p \approx \sin M (1 + 2e \cdot \cos M) \approx \sin M \cdot \left(\frac{1 + e \cdot \cos M}{1 - e \cdot \cos M} \right)$$

Damit ist unter der Voraussetzung kleiner Exzentrizität die Verwandtschaft des Äquantenmodells zur Keplerellipse gezeigt. Die Keplerellipse führt also in erster Näherung zu keinem anderen Ergebnis als das Äquantenmodell.

Die vier bzw. drei verschiedenen Ergebnisse für die variable Sonnengeschwindigkeit sind in der folgenden Tabelle gegeneinandergestellt.

Die Umlaufgeschwindigkeit der Sonne auf der Ekliptik

Zeichen	babylonisch	Hipparch	Äquantenmodell =Keplerellipse
Wassermann:	1° 0′	1° 1′	1° 1′
Fische:	0° 59′	1° 0′	1° 0′
Widder:	0° 58′	1° 0′	0° 59′
Stier:	0° 57′	1° 0′	0° 58′
Zwillinge:	0° 56′	0° 57′	0° 57′
Krebs:	0° 57′	0° 57′	0° 57′
Löwe:	0° 58′	0° 57′	0° 58′
Jungfrau:	0° 59′	0° 58′	0° 58′
Waage:	1° 0′	1° 0′	1° 0′
Skorpion:	1° 2′	1° 0′	1° 0′
Schütze:	1° 4′	1° 1′	1° 1′
Steinbock:	1° 2′	1° 1′	1° 1′

Wie sind diese Ergebnisse und ihre Unterschiede nun zu bewerten? Ptolemäus schuf mit dem Äquanten ein Werkzeug, das die mit den technischen Mitteln seiner Zeit gewonnenen Beobachtungsdaten (für Planeten) vollauf erklären konnte. Die Einführung des Äquanten zeugt von einer tiefen Einsicht in das Wesen der Planetenbewegung, deren zeitlicher Symmetriepunkt nicht mit dem räumlichen Symmetriepunkt der Bahn zusammenfällt. Ein gedachter Beobachter im Äquanten sieht einen in der Winkelgeschwindigkeit gleichförmigen Umlauf.

Kepler konnte die Vorstellung des exzentrisch gelagerten Kreises überwinden. Er kam zur Ellipse als universeller Bahnform der Planetenbewegung, allerdings durch die Untersuchung einer Planetenbahnen mit großer Exzentrizität, nämlich der des Mars. Die gefundenen Verhältnisse verallgemeinerte er auch auf die weniger exzentrische Erdbahn, bei der die Bewegungsverhältnisse, die in seinen Gesetzen zum Ausdruck kommen, nicht so deutlich zutage treten, wie beim Mars.

Hipparch ist als Erfinder des Exzentermodells zu würdigen. Die aus seinem Modell abgeleiteten Sonnengeschwindigkeiten standen aber im Widerspruch zu den Daten mit denen die babylonische Astronomie rechnete.

Blicken wir abschließend noch einmal zurück auf die Werte der babylonischen Astronomie. Sie folgen dem natürlichen Sonnenverhalten, das im Äquanten- und Ellipsenmodell in erster Näherung gemeinschaftlich richtig berechnet wird, eher als das Hipparch'sche Modell. Waren Hipparchs Bemühungen etwa ein Rückschritt? – Nein, denn er suchte nach einer geometrischen Beschreibung, die das Naturverhalten auf der Basis eines einfachen Prinzips erklären sollte. Sein Prinzip, nämlich der gleichförmige Umlauf auf einem exzentrischen Kreis, hat sich als falsch herausgestellt, nicht jedoch der wesentliche Ansatz, ein solches Prinzip müsse sich hinter den natürlichen Erscheinungsformen der Planetenbewegung verbergen.

Das Bestreben, ein solches Prinzip zu entdecken und damit den Schleier vor einer tiefen Naturgesetzmäßigkeit zu lüften, findet man in der babylonischen Astronomie dagegen nicht. Die babylonischen Astronomen entwickelten ein beschreibendes System, welches mit einer hohen Rechengenauigkeit und festen arithmetischen Regeln aus den vergangenen Gestirnspositionen die zukünftigen Örter vorhersagen sollte. Die in den Rechnungen verwendete Genauigkeit entsprach aber nicht der Genauigkeit der Gestirnsbeobachtung, wie ein Blick in die Tabelle mit den babylonischen Sonnengeschwindigkeiten zeigt. Die Daten dort sind auf Bogensekunden angegeben, eine Genauigkeit, die weit von den damaligen Möglichkeiten der Positionsbestimmung entfernt ist. Außerdem sind insbesondere die Extremalwerte der Sonnengeschwindigkeit deutlich zu groß bzw. zu klein. Dieses „Hinausschießen übers Ziel“ findet man mehrmals in der babylonischen Astronomie. Die mittleren Perioden sind sehr genau, die Amplituden nur grob angepasst. Die Angabe der Bogensekunden spiegelt damit keine tatsächliche astronomische Genauigkeit wider, sondern die Genauigkeit, mit der bei den Rechenmethoden gearbeitet wird. Eine geringere Genauigkeit bei diesen Operationen würde über lange Zeiträume, in denen sich kleine Fehler

immer weiter anhäufen, schließlich zu großen Positionsfehlern führen. Die Werte für die variable Sonnengeschwindigkeit entspringen auch nicht Beobachtungsprogrammen zur Ermittlung solcher Daten zu wissenschaftlichen Zwecken, sondern wurden im Lauf der Entwicklung der Berechnungsschemata solange angepasst, bis die Berechnungen gut mit den wirklichen Erscheinungen (z.B. Mondfinsternisse) übereinstimmten. Berechnungsziele waren zunächst die Zeitpunkte der Neu- und Vollmonde, die Sichtbarkeitsdaten der kommenden Neulichter als Zeichen der Monatsanfänge, die Länge der Mondmonate und die Notwendigkeit der Einfügung von Schaltmonaten. Im Zuge der Bewältigung dieser kalendarischen Fragestellungen wurden Techniken entwickelt, die schließlich auch die Variation der Sonnen- und Mondgeschwindigkeit erfassten und letztlich die Vorhersage der Mondfinsternisse ermöglichten. Dieses Wissen um den gestirnten Himmel, das aus der Motivation zur Regelung des Mondkalenders und auch aus astrologischen Beweggründen entstand, wurde zur Basis für die hellenistische wissenschaftliche Astronomie, die unter Hipparch zu ihrer ersten Blüte kam.

Referenzen

- [1] F. Bruins & M. Bruins: The Equator Ring, Equinoxes and Atmospheric Refraction; Centaurus 1976, vol. 20. no. 2, pp 89-111
- [2] O. Neugebauer: The exact Sciences in Antiquity; 2nd ed., Dover Publications, New York 1969, p. 114
- [3] F. J. Kugler: Die babylonische Mondrechnung; Herder'sche Verlagsbuchhandlung, Freiburg 1909
- [4] J. Britton & C. Walker: Astronomy and Astrology in Mesopotamia; in: Astronomy before the Telescope; C. Walker (Ed.), British Museum Press, London 1996
- [5] B. L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft Bd. 2: Die Anfänge der Astronomie; 2. Aufl., Birkhäuser Verlag, Basel Boston Stuttgart 1980
- [6] C. Ptolemäus: Handbuch der Astronomie, Bd. I & II; dt. Übers. von Karl Manitius, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963
- [7] W. Schlosser: Der Sonnendurchmesser als Schlüsselwert in der Schulastronomie; Praxis der Naturwissenschaften – Physik, Heft 4, Jahrgang 37 1988, S. 2
- [8] C. Ptolemäus: Handbuch der Astronomie, a.a.O., Bd. I, Kap. 3, S. 167
- [9] G. D. Roth (Hrsg.): Handbuch für Sternfreunde – Bd. I, 4. Aufl., Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1989, S. 288
- [10] A. Stückelberger: Das Astrolab des Ptolemäus; Sterne und Weltraum 4/1999, S. 348
- [11] A. Pichot: Die Geburt der Wissenschaft, Von den Babyloniern zu den frühen Griechen; Campus Verlag, Frankfurt a. M. 1995, S. 108

Weitere didaktische Literatur zum Thema

- W. G. Rees: Calculating the Parameters of the Earth's Orbit; Eur. J. Phys. 12 (1991) 96 – 100
- P. K. Aravind: Calculating the Eccentricity of Earth's Orbit; Am. J. Phys., Vol. 55, No. 12 (1144-1145)
- C. H. Holbrow: On the Eccentricity of the Earth's solar Orbit; Am. J. Phys. 56 (9), 775
- M. G. Calkin: Calculating the parameters of Earth's Orbit; Am. J. Phys. 57 (4), (374 – 375)
- R. Snyder: Kepler's laws and earth's eccentricity; Am. J. Phys. 57 (7), 663-664
- J. Evans: On the Function and the probable origin of Ptolemy's Equant; Am. J. Phys. 52 (12), 1080-1089
- D. Rawlins: Ancient Heliocentrists, Ptolemy and the Equant; Am. J. Phys. 55 (3), 235-239
- J. Evans: The Division of the Martian Eccentricity from Hipparchos to Kepler: A History of the Approximations to Kepler Motion; Am. J. Phys. 56 (11), 1009-1024
- Ulrich Köpf: Warum die Jahreszeiten verschieden lang dauern oder wie sich mit Hilfe eines Kalenders die Exzentrizität der Erdbahn berechnen läßt; MNU 47/7 (1994), pp. 418-421

Andreas Guthmann: Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung;
Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus, Mannheim 1994
Oliver Montenbruck: Grundlagen der Ephemeridenrechnung; SuW Taschenbuch Nr. 10, 5.
Aufl., Verlag Sterne und Weltraum, München 1992

Abbildungsunterschriften

Abbildung 1:

Die Doppelhelix als phänomenologisches Modell der geozentrischen Sonnenbahn.

Abbildung 2:

Bestimmung der Jahrespunkte mit dem Gnomon.

Abbildung 3:

Das geozentrische Weltbild mit dem Äquator- und dem Ekliptikkreis.

Abbildung 4:

Das Exzentermodell für die Erdbahn. Perihel und Wintersolstiz fallen zusammen.

Abbildung 5:

Das Exzentermodell für die Erdbahn. Perihel und Wintersolstiz fallen nicht zusammen.

Abbildung 6:

Die Lage des Äquanten in Relation zur Sonne.

Abbildung 7:

Der Äquant als Zentrum der gleichförmigen Bewegung.

Abbildung 8:

Konstruktion der Planetenpositionen in Raum und Zeit.

Abbildung 9:

In gleichen Zeiten überschrittene Sektoren.

Abbildung 10:

Graphische Auftragung des Inklinationsanteils der Zeitgleichung.

Abbildung 11:

Graphische Auftragung der zwei Zeitgleichungsanteile

Abbildung 12:

Graphische Auftragung der Zeitgleichung

Abbildung 13:

Die Zeitgleichung und die Näherungslösung im Vergleich

Abbildung 14:

Das Astrolabium des Ptolemaios in einer Rekonstruktion von A. Stückelberger.

Abbildung 15:

Dynamik im Exzentermodell von Hipparch.

Abbildung 16:

Dynamik im Exzentermodell von Ptolemäus.

Abbildung 17:

Die Planetenbahn als Ellipse.

Abbildung 18:

Zur Herleitung der Keplergleichung.

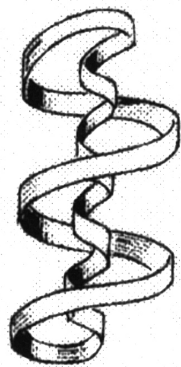
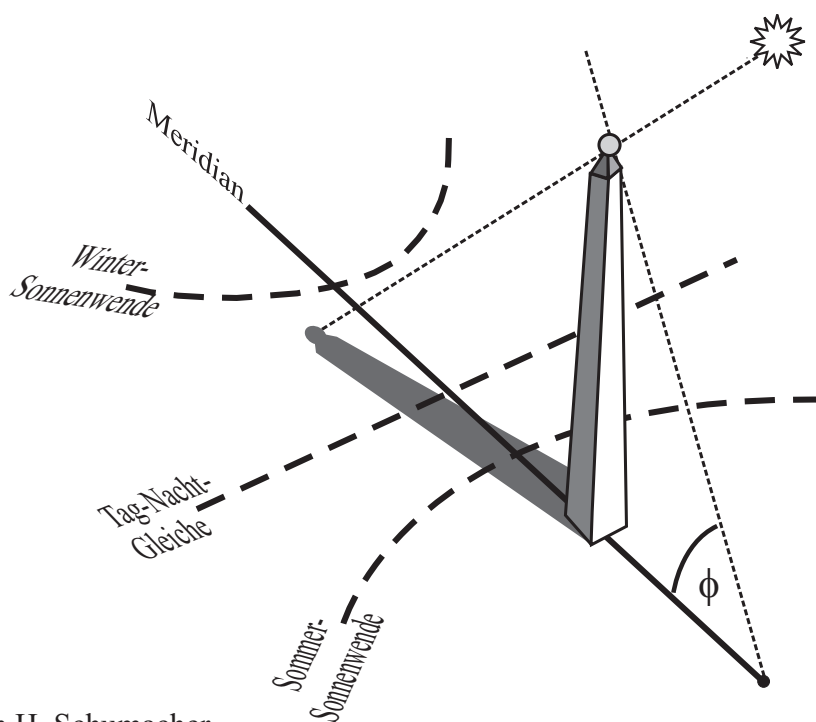


Abbildung 1



nach H. Schumacher

Abbildung 2

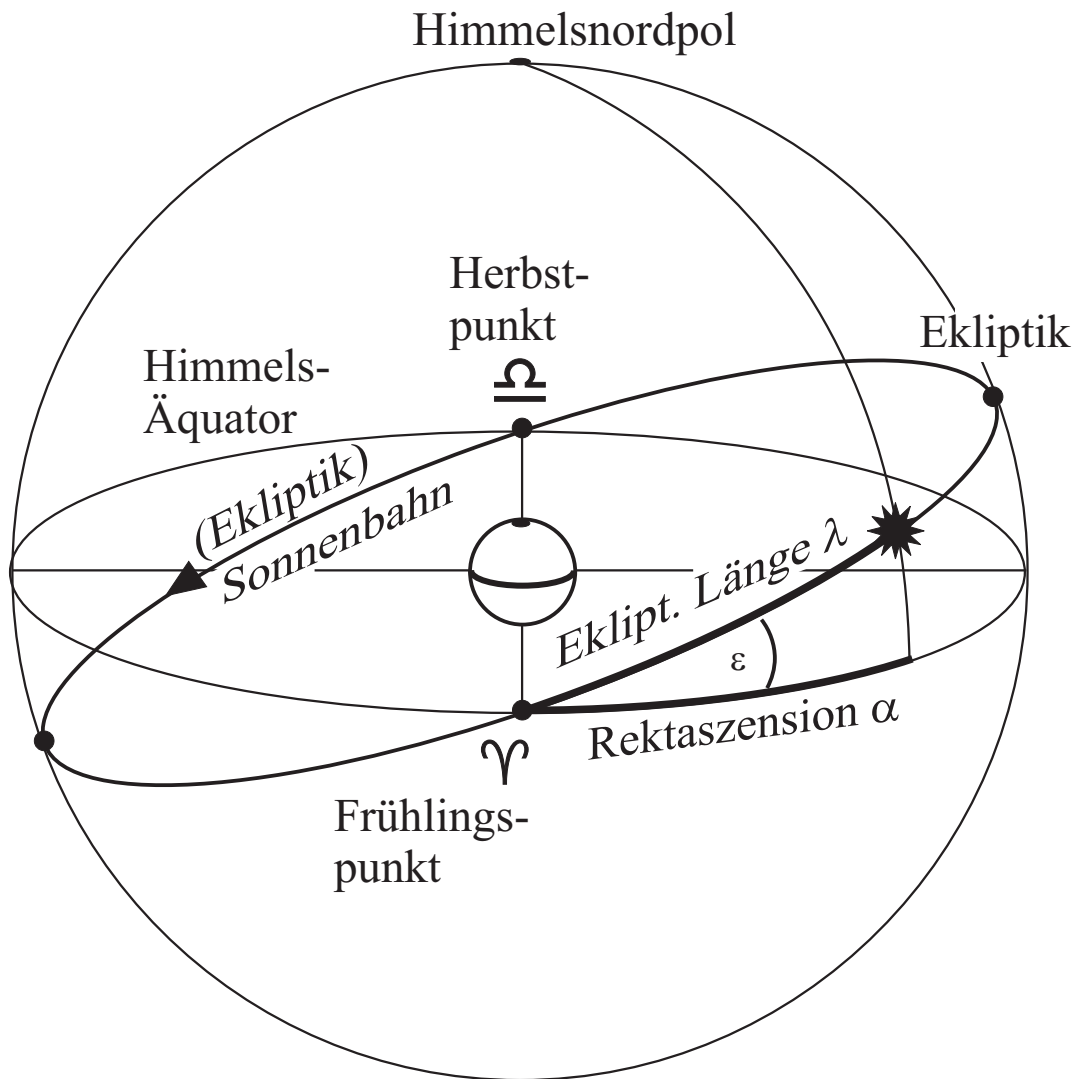


Abbildung 3: Geozentrisches Weltbild mit der Lage des Himmelsäquators und der Ekliptik

Die Planetenbahn als Exzenter

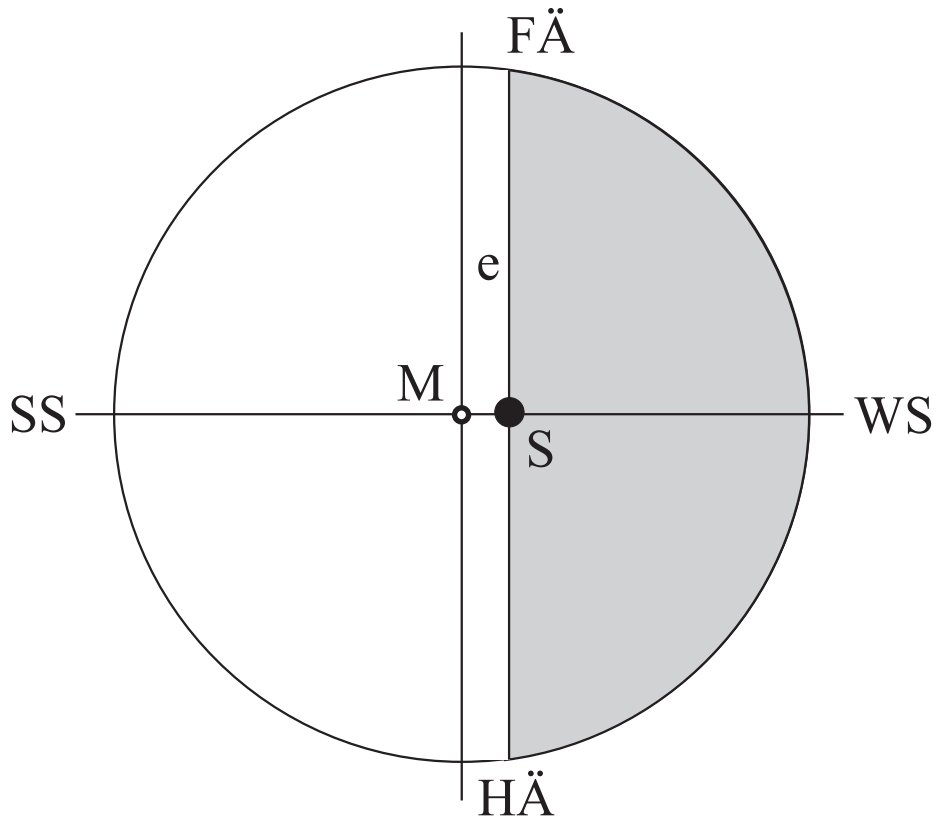


Abb. 4: Periheldurchgang und Wintersolstitium fallen zusammen

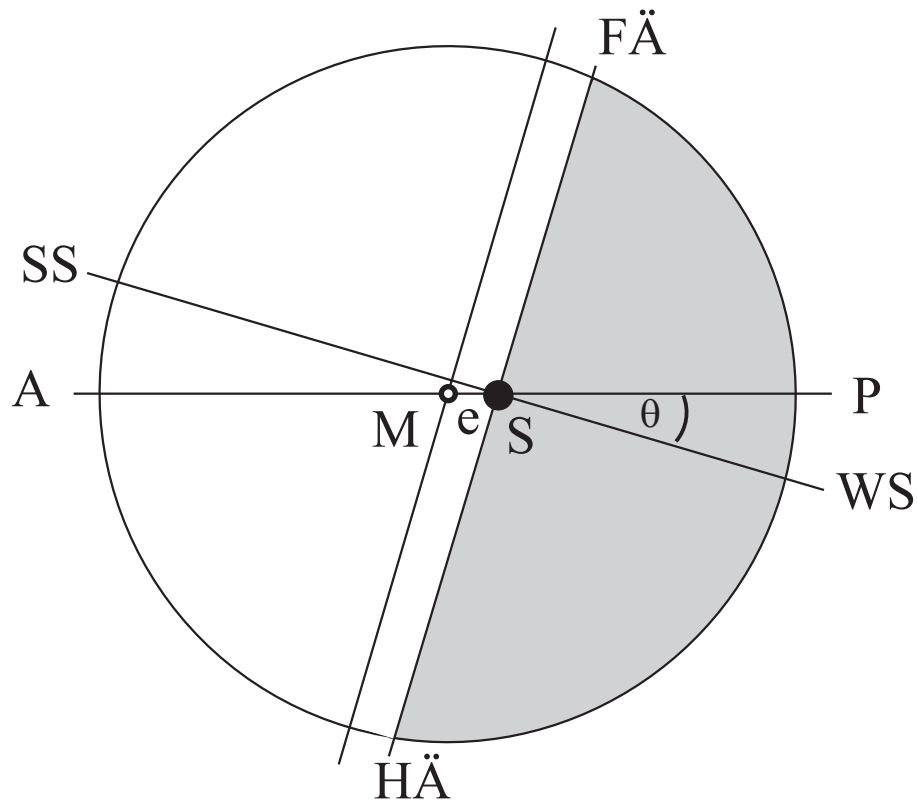


Abb. 5: Periheldurchgang und Wintersolstitium fallen nicht zusammen

Der Äquant

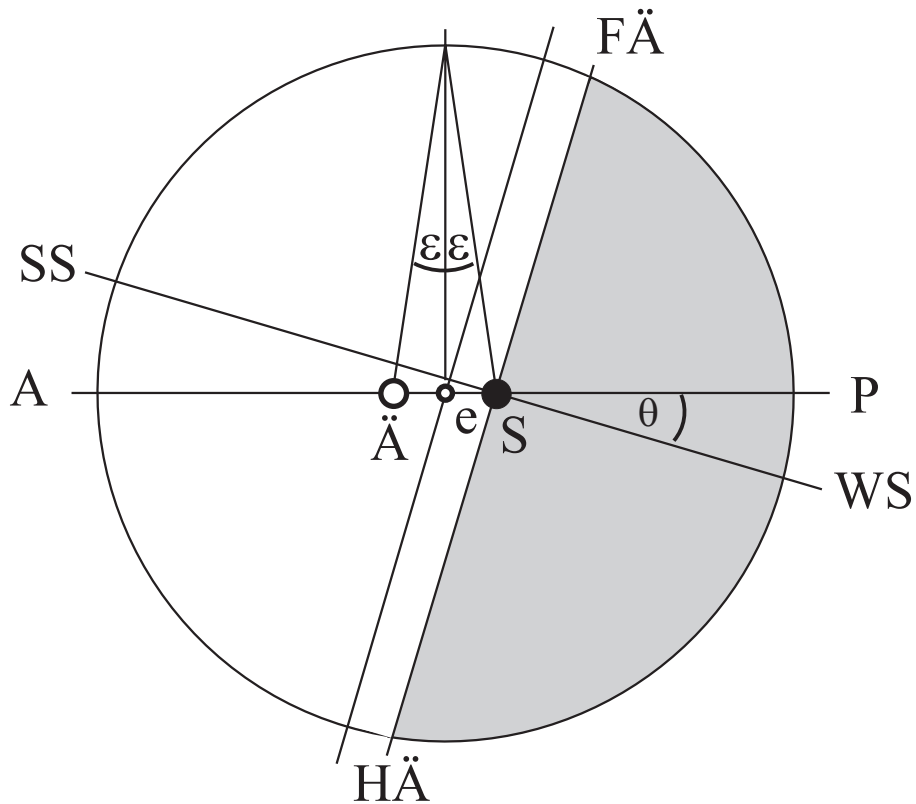


Abb. 6: Die Lage des Äquanten in Relation zur Sonne

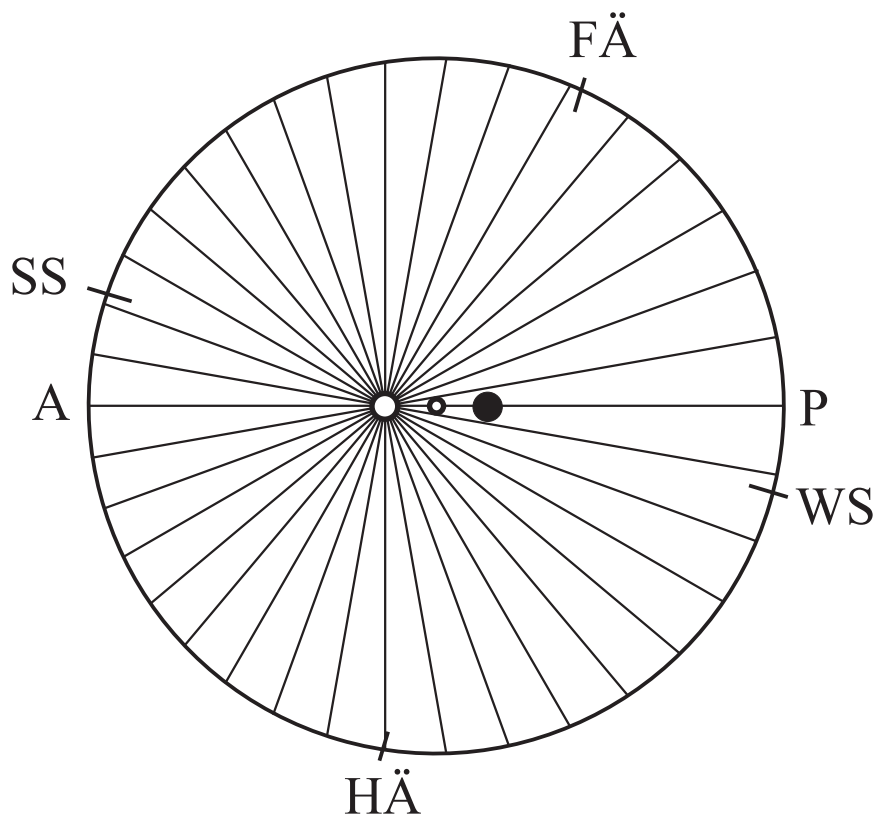


Abb. 7: Der Äquant als Zentrum der gleichförmigen Bewegung

Bahndynamik in der Äquantentheorie

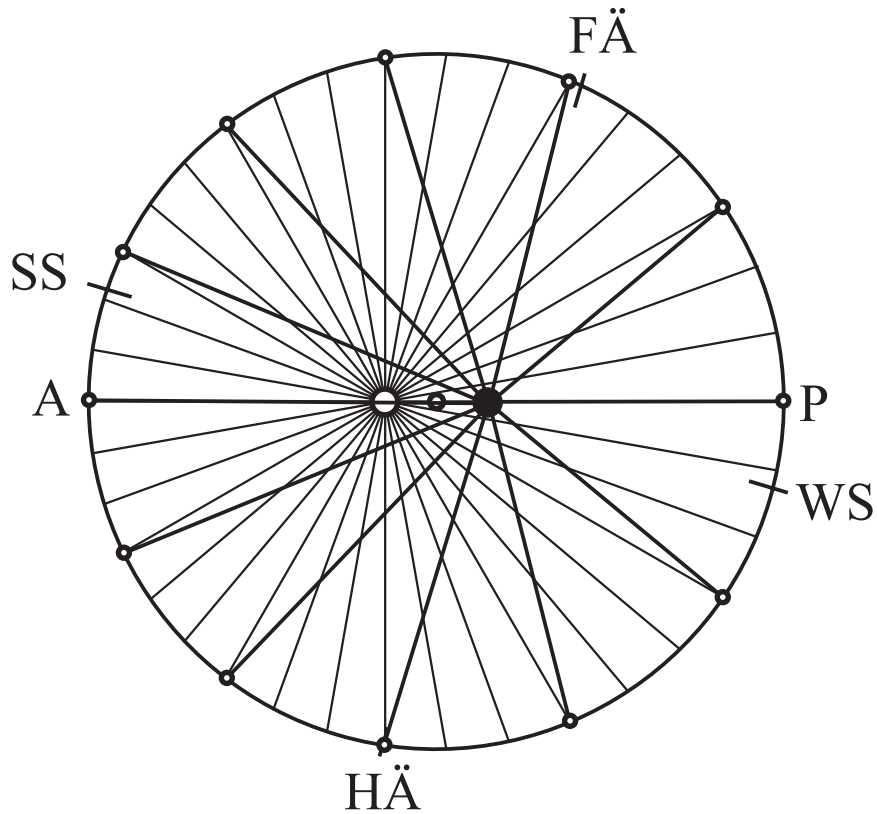


Abb. 8: Konstruktion der Planetenpositionen in Raum und Zeit

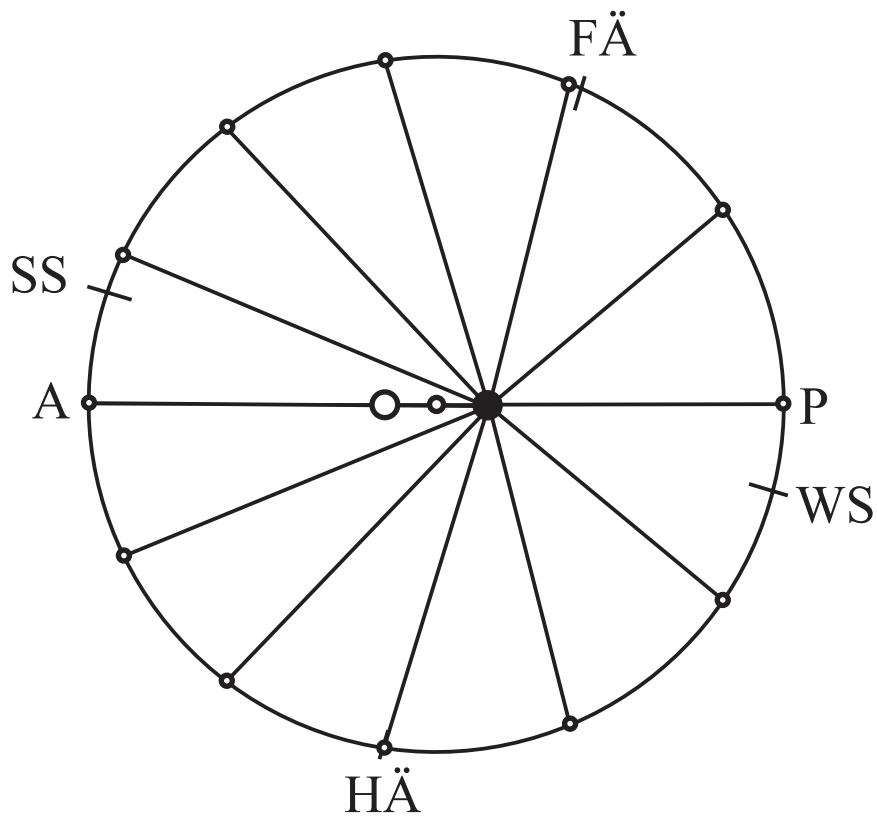


Abb. 9: In gleichen Zeiten überschrittene Sektoren

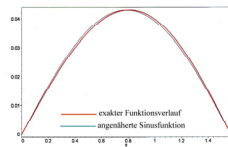


Abbildung 10

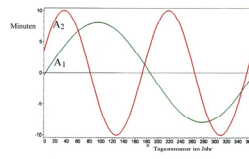


Abbildung 11

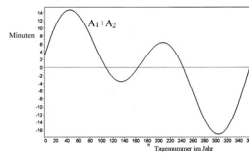


Abbildung 12



Bahndynamik im Exzentermodell

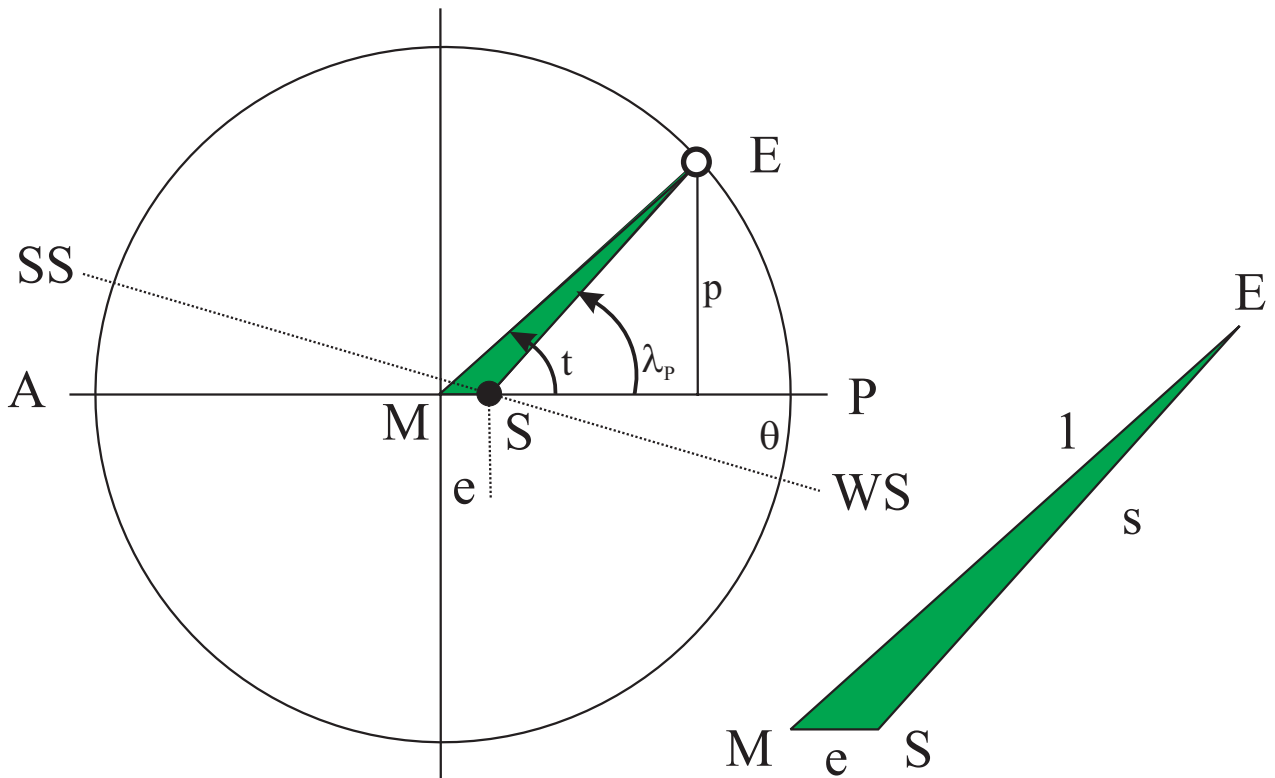


Abb. 15: Dynamik im Exzentermodell von Hipparch

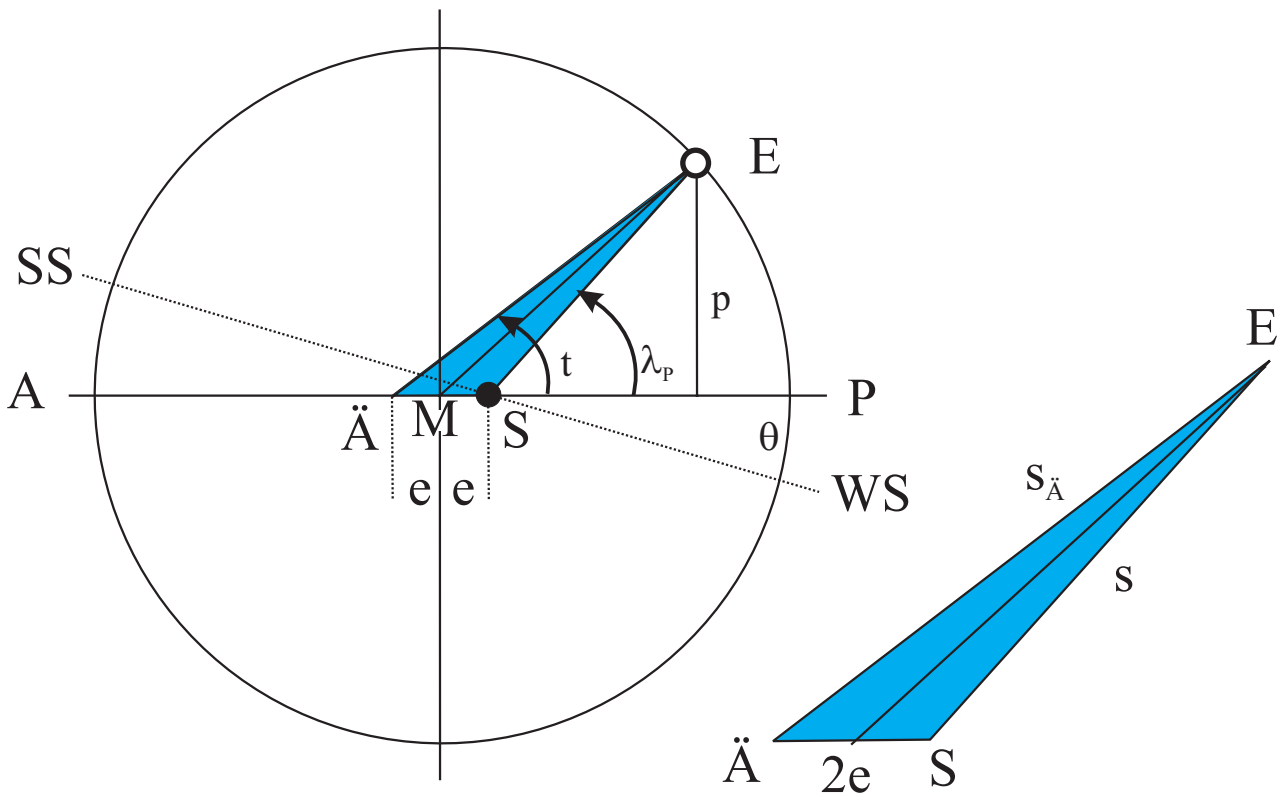


Abb. 16: Dynamik im Exzentermodell von Ptolemäus

Die Keplerellipse

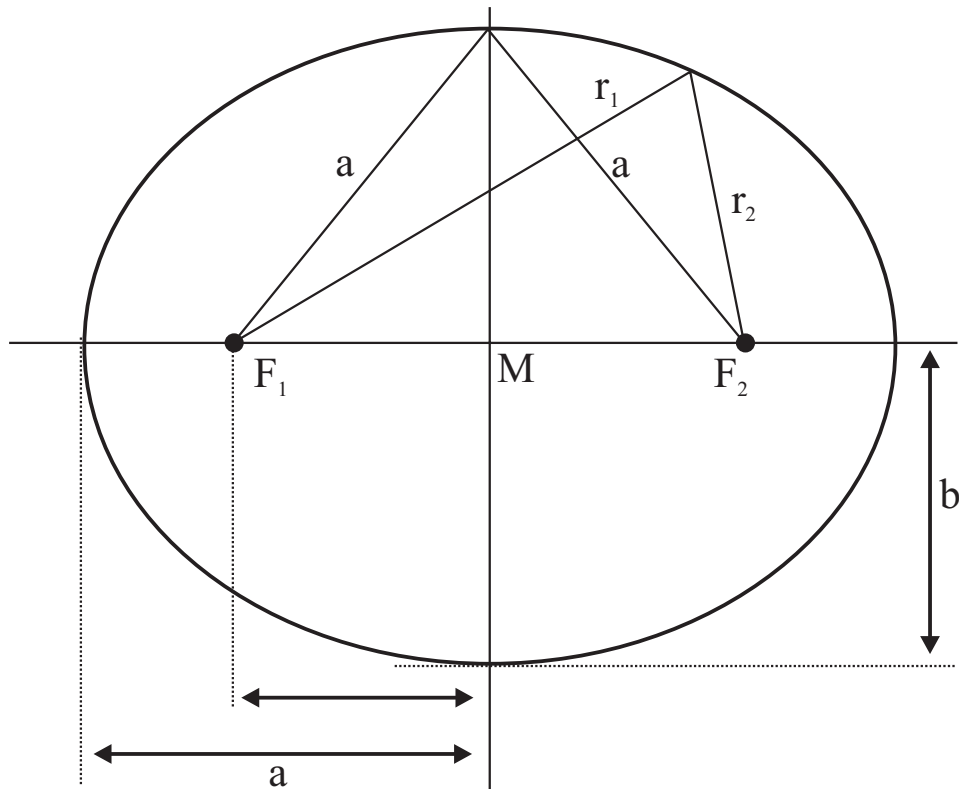


Abb. 17: Die Planetenbahn als Ellipse

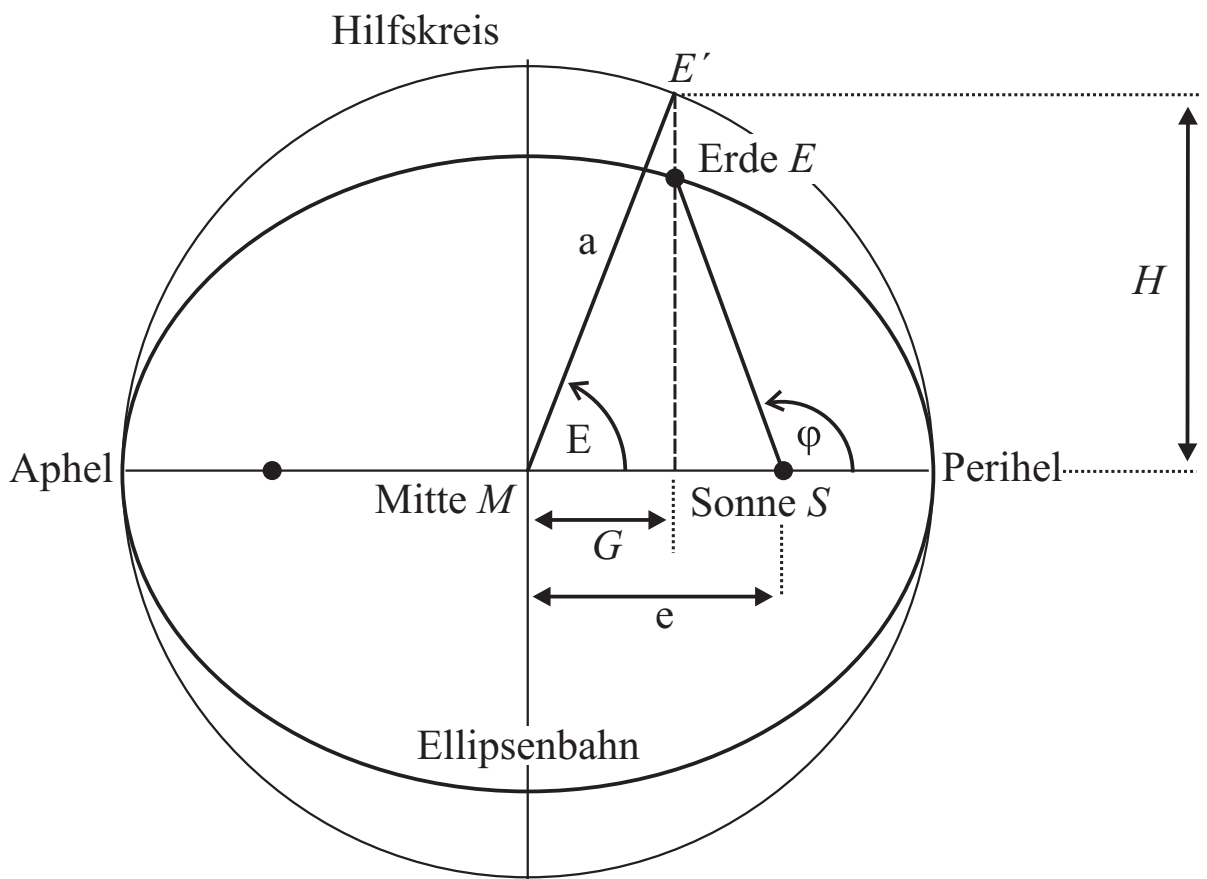


Abbildung 18: Zur Herleitung der Keplergleichung