

Abschätzung der Platonischen Jahreslänge

von Burkard Steinrücken, Universität Dortmund

Die Lunisolar-Präzession und die damit verbundene Wanderung der Pollage und des Frühlingspunktes wird in jedem einführenden Astronomielehrbuch behandelt. Auch dient der Erdkreisler oft als Standardbeispiel für die Präzessions- und Nutationsphänomene eines beliebigen Kreisels, auf den ein Drehmoment einwirkt.

Die Länge eines Präzessionszyklus - das Platonische Jahr - beträgt ca. 25800 Jahre, so daß der Frühlingspunkt etwa alle 2150 Jahre ein Sternzeichen vorrückt. Die fehlende Übereinstimmung zwischen den astrologischen Sternzeichen und den astronomischen Zodiakussternbildern ist ebenfalls auf diese Präzession zurückzuführen.

Nach einer Berechnung der für die Astronomie und Kulturgeschichte der Sternforschung und Sterndeuterei so bedeutsamen Länge des Platonischen Jahres sucht man in der didaktischen Literatur vergeblich, und nur die spezielleren Werke der Himmelsmechanik behandeln dieses Thema unter Zuhilfenahme ihres mathematischen Kalküls (siehe z.B. [1]). Für die Schule oder den interessierten Laien kommt diese Behandlungsform nicht in Frage und so verbleibt es meist bei dem Hinweis, dass durch die Eigenrotation der Erdachse und die daraus resultierenden Fliehkräfte ein äquatorialer Wulst entsteht, auf den wegen der Schiefelage des ellipsoiden Erdkörpers gegenüber der Ebene der Ekliptik Kräfte durch Sonne und Mond einwirken, die ein Drehmoment zur Folge haben, welche den Erdkörper „aufzurichten“ bestrebt sind. Da die Erde jedoch rotiert, weicht sie durch die Präzessionsbewegung der Aufrichtbewegung aus. Soweit die Besprechung des Problems in der Standardliteratur.

In diesem Artikel soll eine vereinfachte Berechnungsweise vorgestellt werden, von der wir die richtige Größenordnung für die Dauer eines Präzessionszyklus erwarten können. Wenn eine Behandlung in der Schule möglich sein soll, so müssen wir viele mathematische Fallstricke umgehen und sinnvolle Vereinfachungen und Näherungen machen, die den Schülerinnen und Schülern durch Plausibilitätsargumente nahezubringen sind.

Erster Schritt: Ein Ausflug in die elementare Kreiseltheorie

Der erste Schritt besteht in einem Rückgriff auf die elementare Kreiseltheorie mit ihren Begriffen *Drehimpuls*, *Trägheitsmoment* und *Drehmoment*. Eine Kenntnis dieser Begriffe wird vorausgesetzt. Ein rotierender Kreisel mit Drehimpuls L , auf den ein Drehmoment M einwirkt, präzidiert mit folgender Frequenz:

$$\text{Präzessionsfrequenz: } \omega_p = \frac{M}{L \cdot \sin \alpha}$$

Diese Kreisfrequenz lässt sich nach der Formel $\omega = 2\pi / T$ sogleich in die Zeitdauer T einer Präzessionsperiode umwandeln. In unseren Beispiel wäre T schon die gesuchte Länge des Platonischen Jahres.

$$\text{Dauer einer Präzessionsperiode: } T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi \cdot L \cdot \sin \alpha}{M}$$

Wir wollen die Formel für ω jedoch noch verständlich machen und schauen dazu zunächst auf die Abbildung 1. Dort ist gezeigt, wie sich der Drehimpulsvektor L eines Kreisels unter der Einwirkung eines äußeren Drehmomentes M verhält. Analog zur Linearbewegung, wo der Transversalimpuls p eine Erhaltungsgröße ist, wenn an das betrachtete System keine äußere Kraft angreift, bleibt bei der Drehbewegung auch L erhalten, wenn dem System kein Drehmoment M aufgeprägt wird. Diese Bedingung ist bei der Präzessionsbewegung jedoch nicht erfüllt. Das Drehmoment M bewirkt eine zeitliche Veränderung des Drehimpulses L nach der

Formel $\Delta L = \Delta M / \Delta t$. Da wir die Richtung des angreifenden Drehmoments kennen oder leicht bestimmen können (mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel für Hebelarm, angreifende Kraft und resultierendes Drehmoment), kennen wir auch die Richtung von ΔL : gleichgerichtet zu M , also senkrecht zur aktuellen Lage von L . In einer gegebenen Zeit Δt verändert das Drehmoment M den Drehimpuls L um ΔL . In infinitesimalen Zeiten dt kommt es zu infinitesimalen Drehmomentsänderungen dL , die jeweils senkrecht auf L stehen und immer in einer Ebene liegen, in der auch die Spitze des Drehimpulsvektors L liegt. Die Spitze des Vektors L wird durch die ständige Änderung von L um dL dazu bewegt, innerhalb der Ebene einen Kreis zu durchlaufen, den Präzessionskreis. Wegen der Existenz von L (was als Synonym für die Drehbewegung gelten mag) bewirkt M folglich keine einfache Kippbewegung, sondern den Umlauf des Drehimpulsvektors um einen Kegel mit dem Öffnungswinkel $2\mathbf{a}$. Der Winkel \mathbf{a} beschreibt die Abweichung der Richtung des Drehimpulsvektors aus jener Lage, in der keine Präzession auftritt, da dann keine äußeren Drehmomente angreifen. In unserem Spezialfall des Erdkreisels wäre das der Fall, wenn die Pollage der Erde mit dem Ekliptikpol übereinstimmte; jedoch schließen beide den berühmten Winkel von $23,5^\circ$ ein. Folglich ist hier $\mathbf{a} = 23,5^\circ$.

Die Präzessionsfrequenz berechnet sich nun wie folgt. Innerhalb der Zeitspanne dt kommt es durch die Wanderung der Spitze von L auf dem Präzessionskreis zu einer Winkeländerung $d\mathbf{f}$, die mit Hilfe der Geometrie des Präzessionskreises bzw. Kegels berechnet werden kann:

$$d\mathbf{f} = \frac{dL}{L \cdot \sin \mathbf{a}}; \quad \text{umgestellt nach } dL: \quad dL = L \cdot \sin \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}$$

Durch zeitliches Ableiten wird nun die Präzessionsfrequenz $\mathbf{w}_p = d\mathbf{f} / dt$ ins Spiel gebracht. Aber auch das Drehmoment taucht auf der linken Seite der Gleichung wieder auf, wenn wir den Ausdruck dL/dt bilden:

$$\frac{dL}{dt} = M = L \cdot \sin \mathbf{a} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{f}}{dt}}_{\mathbf{w}_p} \Leftrightarrow \mathbf{w}_p = \frac{M}{L \cdot \sin \mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \quad T_p = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{w}_p} = \frac{2\mathbf{p} \cdot L \cdot \sin \mathbf{a}}{M}$$

Die eingangs angegebene Formel ist nun begründet. Allerdings haben wir bei der Diskussion keine übermäßige Strenge bei der eigentlich erforderlichen vektoriellen Notation von L und M an den Tag gelegt. Bei der Behandlung im Unterricht muss daher stets Wert auf die Beachtung der Richtungen gelegt werden, z.B. durch Verinnerlichung der Abbildung 1.

Wir sind mit unserem Ausflug in die elementare Kreiseltheorie am Ziel angelangt und wissen nun, was wir für unsere Aufgabe der Abschätzung der Platonischen Jahreslänge zu berechnen haben: Den Erddrehimpuls L und das Drehmoment M , welches Sonne und Mond auf die „schiefgestellte“ Erde ausüben.

Zweiter Schritt: Der Drehimpuls der Erde

Zur Ermittlung des Erddrehimpulses benötigen wir außer der siderischen Rotationsdauer auch die Erdmasse, die räumliche Ausdehnung der Erde und die Massenverteilung im Erdkörper. Die zuletzt genannten drei Größen gehen in das Massenträgheitsmoment J der Erde ein und davon hängt das Ergebnis stark ab. Man kennt zwar das Trägheitsmoment der Erde, diese Ergebnisse beruhen aber zum Teil auf der Beobachtung der Präzessionseffekte. Da wir die Dauer des Präzessionszyklus berechnen wollen und deshalb aus logischen Gründen kein Erdträgheitsmoment zu Rate ziehen wollen, in das das zu prüfende Ergebnis verstrickt ist, schätzen wir das Erdträgheitsmoment grob ab, und nehmen an, es handele sich um eine homogene Vollkugel. Das sollte auf jeden Fall die richtige Größenordnung liefern, und mehr können wir bei den zahlreichen Näherungen, die uns noch bevorstehen, sowieso nicht erwarten. Auch die Tatsache, dass der Erdkörper ein Rotationsellipsoid ist, können wir an dieser Stelle

noch übersehen (bei der Abschätzung der Drehmomente spielt das jedoch die entscheidende Rolle). Die Formel zur Berechnung des Drehimpulses einer rotierenden Vollkugel lautet:

$$L = J_{\text{Vollkugel}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Setzen wir die Erddaten ein, so erhalten wir eine Abschätzung für den Erddrehimpuls (für r wollen wir den auf zwei Stellen gerundeten Polradius der Erde nehmen, für $\boldsymbol{\omega}$ die siderische Kreisfrequenz von $2\pi/86164\text{s}$):

$$L_{\text{Erde}} \approx \frac{2}{5} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6,36 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{86164\text{s}} \approx 7,1 \cdot 10^{33} \text{ Js}$$

Ein Vergleich mit der Literatur zeigt, dass wir das exakte Ergebnis erhalten, wenn wir den Faktor $2/5 = 0,4$, der aus der Annahme hervorspringt, die Erde sei eine homogene Vollkugel, durch den Faktor $0,331$ ersetzen [2]. Das Trägheitsmoment der Erde ist folglich ein wenig geringer als das einer homogenen Vollkugel, was auf eine Konzentration der dichteren Komponenten im Erdinneren zurückzuführen ist. Die Diskussion der Massenverteilung von Planeten und ihrer Trägheitsmomente ist ein interessanter Nebenaspekt unseres Themas, den wir aber nicht weiter vertiefen wollen. Verwiesen sei hier nochmals auf die Literaturangabe [2].

Dritter Schritt: Vereinfachtes Modell für den äquatorialen Massenwulst

Haben wir im vorangegangenen Abschnitt noch die ellipsoide Gestalt der Erde ignoriert, so müssen wir nun die Abweichung von der Kugelgestalt thematisieren, denn nur der sich ausbildende äquatoriale Wulst kann für ein Drehmoment auf den Erdkreis verantwortlich sein. Eine ideale Kugel böte keine zusätzlichen Angriffspunkte außerhalb des Schwerpunktes für die Gravitationskräfte von Sonne und Mond.

Die volle Theorie der Lunisolarpräzession greift auf den Begriff des Trägheitstensors zurück, der die Massenverteilung bezüglich dreier Hauptträgheitsachsen beschreibt und durch Integrationen über das ganze mit Masse erfüllte Volumen zu berechnen ist. Wenn wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln hier weiterkommen wollen, müssen wir grob vereinfachende Annahmen machen. Ein vernünftiges Modell, mit dem wir weiterrechnen wollen, ist z.B.:

Da nur die Gravitationskräfte zwischen der Äquatorwulstmasse und Sonne bzw. Mond ein Drehmoment bewirken, nehmen wir an, dass diese in Form einer gigantischen „Perlenkette“ um den Äquator einer ansonsten idealen Erdkugel mit Polradius gespannt ist. Die ungefähre Wulstmasse können wir berechnen, indem wir das Wulstvolumen mit der mittleren Erddichte multiplizieren; das Wulstvolumen errechnet sich, indem man vom Volumen des bekannten Erdellipsoids das Volumen der einbeschriebenen Kugel (jener mit Polradius) abzieht. Das Volumen eines Ellipsoids berechnet sich zu $\frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b \cdot c$. Die Größen a , b und c bezeichnen die Abstände vom Mittelpunkt des Ellipsoids bis zum jeweiligen Rand bezüglich der drei Symmetrieachsen (siehe Abbildung 2 a). Beim rotationssymmetrischen Erdellipsoid ist a der Polradius und $b=c$ der Äquatorradius (Abbildung 2 b). Wulstvolumen bzw. Wulstmasse berechnen sich dann zu:

$$\text{Wulstvolumen: } V = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot c^2 - \frac{4}{3}\pi \cdot a^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot a^3 \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right)$$

$$\text{Wulstmasse: } m_{\text{Wulst}} = \rho_{\text{Erde}} \cdot V = m_{\text{Erde}} \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right)$$

mit: $a = 6,3569 \cdot 10^6 \text{ m}$ (Polradius) und $c = 6,3784 \cdot 10^6 \text{ m}$ (Äquatorradius) ergibt sich

eine Wulstmasse von: $m_{\text{Wulst}} \approx 4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Die vereinfachte Berechnung ignoriert wieder die inhomogene Massenverteilung der Erde. An der Oberfläche der Erdkugel und damit auch im Wulst sind die weniger dichten Komponenten versammelt. Der ermittelte Wert mag mithin als Obergrenze für die Masse gelten, die zur Abweichung von der Kugelgestalt beiträgt. Wenn wir diese Masse als gedachte äquatoriale

Schnur um eine Kugelerde mit Polradius legen, ignorieren wir die genaue Gestalt und Massenverteilung nochmals. Das Modell erspart uns aber viel höhere Mathematik, denn nun haben alle Masseperlen den gleichen Abstand zum Erdmittelpunkt, nämlich den Polradius a (Abbildung 2 d).

Vierter Schritt: Eine zu grobe Näherung und ein vorläufiges Ergebnis

Zur Ermittlung der Drehmomente, die Sonne und Mond auf die Erde ausüben, berechnen wir zunächst die Gravitationskräfte zwischen Sonne bzw. Mond und der Wulstmasse. Aus didaktischen Gründen führen wir ein Modell ein, welches die wahren Verhältnisse zu sehr vereinfacht und damit ein unbefriedigendes Ergebnis liefern wird. Nehmen wir an, jeweils die Hälfte der Wulstmasse sei in zwei „Perlen“ vereinigt, die am Äquator diametral zueinander gelagert sind (Abbildung 2 c). Nehmen wir weiterhin an, wir könnten die Stellung von Sonne, Mond und Masseperlen derart manipulieren, dass immer das maximale Drehmoment garantiert ist. Die Abbildung 3 veranschaulicht diese Situation. Die Rechnung wird nun sehr einfach. Sonne und Mond ziehen stärker an der näher gelegenen Masseperle als an der entfernteren. Ein resultierendes Drehmoment stellt sich ein. Das Drehmoment berechnet sich nach der Formel:

$$\text{Drehmoment} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \epsilon$$

Für die spätere Rechnung benötigen wir nur den Betrag von M . Die Richtung des Drehmomentes, bzw. der Umlaufsinn der Präzession läßt sich mit der Rechten-Hand-Regel bzw. durch die Analyse der Abbildung 1 ermitteln. Der Hebelarm r und die Kraft F schließen den Winkel ϵ ein. Wie der Abbildung 3 entnommen werden kann, stimmt er mit dem zuvor eingeführten Winkel α überein, wenn wir außerdem annehmen, dass Sonne und Mond soweit von der Erde entfernt sind, dass die Richtung der Gravitationskraft annähernd parallel zur Ekliptik ist. Bei der Sonne ist das gut erfüllt, beim Mond weniger, denn er ist etwa 60 Erdradien von der Erde entfernt und der Fehler, den wir durch die Annahme der ekliptikparallelen Krafrichtung machen, liegt im Bereich der Mondparallaxe von $1/60$ rad bzw. ca. 1° . Das ist aber immer noch klein gegenüber der Schiefelage der Erde von $23,5^\circ$. Außerdem ist zu bedenken, dass sich der Mond nur selten innerhalb der Ekliptik aufhält, nämlich nur während der Passage des auf- und absteigenden Knotens. Er kann einen Winkelabstand von bis zu $5^\circ 9'$ zur Ekliptik aufweisen. Trotzdem nehmen wir an, er befände sich ständig innerhalb der Ekliptik, denn dann können wir den Einfluss der Sonne und des Mondes nach dem selben Muster berechnen. Die Realität ist natürlich komplizierter: Selbst die Mondknoten wandern auf der Ekliptik (und zwar rückläufig). Dies bewirkt eine zusätzliche Nutation, die dem Präzessionseffekt überlagert ist. Durch numerische Simulation wurde sogar herausgefunden, daß die kurzperiodischen Effekte durch den schnell wandernden Mond wesentlich zur Stabilisierung des Öffnungswinkels des Präzessionskegels von $2 \cdot 23,5^\circ = 47^\circ$ beitragen und somit auch eine langfristige Klimakonstanz sichern, ohne die eine Entwicklung von Leben vielleicht gar nicht möglich gewesen wäre [3]. Die Jahreszeiten mit ihren unterschiedlichen Sonnenhöchstständen sind bekanntlich auch auf den Winkelabstand zwischen Erdpol und Ekliptikpol zurückzuführen.

Der Hebelarm r ist in unserem Beispiel der Polradius a und die Gravitationskräfte berechnen sich nach dem Newtonschen Gesetz:

Drehmomentberechnung im vereinfachten Modell:

$$M = a \cdot \sin e \cdot G \cdot m_{Wulst} \cdot m_{Sonne} \cdot \left(\frac{1}{(r_{Erde-Sonne} - a \cdot \cos e)^2} - \frac{1}{(r_{Erde-Sonne} + a \cdot \cos e)^2} \right) =$$

$$= a \cdot \sin e \cdot G \cdot \frac{m_{Wulst} \cdot m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^2} \cdot \frac{4 \frac{a}{r_{Erde-Sonne}} \cdot \cos e}{\left(1 - \frac{a^2 \cdot \cos^2 e}{r_{Erde-Sonne}^2}\right)^2} \approx 4 \cdot a^2 \cdot \sin e \cdot \cos e \cdot G \cdot \frac{m_{Wulst} \cdot m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^3}$$

In der zweiten Zeile wurde der Hauptnenner gebildet und dieser sodann durch 1 angenähert. Wegen der Kleinheit von a^2/r^2 ist das gerechtfertigt. Die Mondrechnung liefert das analoge Resultat. Die Platonische Jahreslänge berechnet sich nun zu (Abstand Erde-Sonne = 150 Mio. km, Abstand Erde-Mond = 384000 km, Sonnenmasse = $2 \cdot 10^{30}$ kg, Mondmasse = $7,35 \cdot 10^{22}$ kg, Gravitationskonstante $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $m_{Wulst} = m_{Erde} \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)$, 1 Sterntag = 86164 s):

$$T_P = \frac{2p}{w_p} = \frac{2p \cdot L_{Erde} \cdot \sin e}{M_S + M_M} = \frac{2p \cdot \frac{2}{5} \cdot m_{Erde} \cdot a^2 \cdot \frac{2p}{T_{Sterntag}} \cdot \sin e}{4 \cdot a^2 \cdot \sin e \cdot \cos e \cdot m_{Erde} \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) \cdot G \cdot \left(\frac{m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^3} + \frac{m_{Mond}}{r_{Erde-Mond}^3}\right)}$$

$$= \frac{2p^2}{5} \cdot \frac{1}{T_{Sterntag} \cdot \cos e \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) \cdot G \cdot \left(\frac{m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^3} + \frac{m_{Mond}}{r_{Erde-Mond}^3}\right)} \approx 1860 \text{ Jahre}$$

Gegenüber der wahren Platonischen Jahreslänge von ca. 25800 Jahren liefert unser primitives Modell eine zu geringe Periodendauer für die Präzession der Erdachse. Aber das ist auch kein Wunder, denn in unserer Vereinfachungswut haben wir immer das volle Drehmoment wirken lassen: Sonne und Mond zogen bei gleichbleibender Geometrie an den zwei gegenüberliegenden Massenperlen und standen ständig in der gleichen Blickrichtung. Das primitive Modell ignoriert viele Aspekte der natürlichen Verhältnisse und wir müssen uns nun im nächsten Schritt darüber Gedanken machen, wie das Modell zu verfeinern ist, welche Annahmen verworfen werden müssen, und welche beibehalten werden können.

Fünfter Schritt: Ein verbessertes Modell

Bei aller Kritik am primitiven Modell - es liefert uns zwei Hinweise: Das Ergebnis ist eine Untergrenze für die Dauer des Platonischen Jahres, da das durch die Voraussetzungen des Modells als viel zu hoch angenommene wirksame Drehmoment eine entsprechend kleine Periodendauer zur Folge hat. Wer noch nie etwas über die Verlagerung des Frühlingspunktes gehört hat, weiß nun, dass dies kein Effekt ist, der innerhalb eines Menschenlebens zu überdeutlichen Ausmaßen anwächst. Der zweite Hinweis hilft uns bei der Neuformulierung der Modellvorstellung: Da die wahre Länge des Platonischen Jahres sehr groß ist gegenüber der Dauer eines Sonnenjahres, bzw. eines Mondumlaufs, spricht: bis zum Ablauf eines Präzessionszyklus viele Sonnen- und Mondumläufe stattgefunden haben, würde ein „Platonischer Dämon“ der kosmische Zeiten in Sprüngen von Jahrtausenden wahrnimmt, Sonne und Mond auf ihren (scheinbaren) Umlaufbahnen um die Erde nur so herumzischen sehen, dass er sich mit einigem Recht vorstellen kann, deren Massen seien längs der Ekliptik um den ganzen Zodiakus herum verschmiert (wir wollen ja aus der Sicht des irdischen Beobachters argumentieren; und dann erscheint auch die Revolution der Erde um die Sonne als Umlauf der Sonne um die Erde). In Analogie zur äquatorialen Perlenschnur, die die Wulstmasse modelliert, können wir dann auch Sonne und Mond im zeitlichen Mittel (bei Zeiten die groß sind im Vergleich zur Umlaufdauer) als Perlenschnüre längs der Ekliptik auffassen. Jede Perle der Mond- und Sonnenschnur zieht nun an

jeder Perle der äquatorialen Wulstschnur und das resultierende Gesamtdrehmoment verringert sich beträchtlich, da es nun auf die Geometrie jedes einzelnen Perlenpaares ankommt. Alle denkbaren Beiträge zum Gesamtdrehmoment sind nun möglich: sowohl der maximale, wenn die Geometrie so ist, wie im letzten Abschnitt beschrieben, als auch der Beitrag Null, wenn Erdmittelpunkt, Äquator- und Mond- bzw. Sonnenperle auf einer Verbindungslinie liegen und kein Drehmoment auftritt.

Einige Aspekte des alten Modells wollen wir jedoch beibehalten. Auch im verfeinerten Modell gehen wir davon aus, dass die Schwerkraftwirkung zwischen Sonne bzw. Mond und den äquatorialen Perlen parallel zur Ekliptik erfolgt, d.h. die geringen parallaktischen Effekte ignoriert werden. Die Vorgehensweise sieht nun so aus: Für die in Abbildung 4 gezeigte Stellung von Sonne und Mond berechnen wir zunächst die Drehmomente auf alle Massenelemente dm der Äquatorschnur.

Das Drehmoment, welches durch die Schwerkraftwirkung auf die i -te Perle der Äquatorschnur ausgeübt wird, berechnet sich zu:

$$\vec{M}_i = \vec{a}_i \times \vec{F}_i \quad \text{bzw. für den Betrag: } M_i = a_i \cdot F_i \cdot \sin e \quad \text{infinitesimal: } dM = a_i \cdot dF \cdot \sin e$$

Die darin enthaltene Größe a_i ist der Abstand der i -ten Masseperle zur Drehachse, um die die Aufrichtbewegung der Erde erfolgen würde, wenn die Erde keinen Eigendrehimpuls hätte. In Zeichnung 4 verläuft diese Achse senkrecht zur Zeichenebene durch die Mitte des Erdkörpers. Abbildung 5 zeigt die Situation, wie sie sich beim Blick vom Nordpol der Ekliptik herab darstellt. Wie berechnet sich der Abstand a_i ? Ein Blick auf die Abbildung 4 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen a_i und R_i . R_i ist die Projektion des Hebelarms a_i auf die Verbindungslinie Erde-Sonne (Vereinbarungsgemäß sollen alle Kräfte F_i in diese vorgegebene Richtung weisen.):

$$a_i = R_i / \cos e$$

Sowohl a_i als auch R_i hängen von der Lage der i -ten Masseperle auf dem Äquator ab. Wir müssen nun einen Winkel einführen, der die Information enthält, welche Masseperle bzw. welches Massenelement dm der Äquatorschnur gerade betrachtet wird.

Der Winkel \mathbf{j} - über den später zu integrieren ist - ist der Azimutalwinkel um die Ekliptiknormale. Die Zählung ($\mathbf{j} = 0$) beginnt bei der Richtung, bei der die Anziehungskraft der Sonne das maximale Drehmoment auf eine Masseperle bewirkt. Abbildung 5 verdeutlicht die Zählweise des Winkels. Die Abbildung 5 zeigt aber auch, dass die kreisförmige Äquatorschnur in der Projektion auf die Ekliptik zur Ellipse wird. Eine exakte Ermittlung von R_i - dem auf die Ekliptik projizierten Abstand der Masseperle i zur Aufrichtachse - in Abhängigkeit vom Winkel \mathbf{j} ist möglich. Die dazu erforderliche Polarkoordinatendarstellung einer Ellipse lässt sich einer mathematischen Formelsammlung entnehmen. Da wir aber noch über den Winkel \mathbf{j} integrieren müssen, und die exakte Berechnung die Sache sehr verkompliziert, nähern wir den Zusammenhang zwischen \mathbf{j} und R_i :

$$R_i = a \cdot \cos e \cdot \cos \mathbf{j}$$

Die Näherung ist gerechtfertigt, denn bei verschwindendem Winkel \mathbf{j} ist $R_i = a \cos e$, wie Abbildung 5 entnommen werden kann; der Fehler ist somit Null. Geht der Winkel gegen $+\pi/2$ oder $-\pi/2$, so wird der Fehler in R_i bedeutungslos, da dann der Hebelarm a_i gegen Null geht und mithin das Drehmoment verschwindet.

F_i ist die Gravitationskraft zwischen der Sonne und der i -ten Masseperle. Die Gravitationskraft hängt wesentlich vom Abstand r_i zwischen der Sonne und der Masseperle ab. Gehen wir vom Bild der Masseperlen nun über zu infinitesimalen Massenelementen mit der Masse $dm = (m_{\text{Wulst}}/2\mathbf{p}) \cdot d\mathbf{j}$, so ergibt sich für die Gravitationskraft auf ein Massenelement dm :

$$dF = G \cdot \frac{m_{\text{Sonne}} \cdot dm}{r_i^2} = G \cdot \frac{m_{\text{Wulst}}}{2\mathbf{p}} \cdot \frac{m_{\text{Sonne}} \cdot d\mathbf{j}}{r_i^2}$$

Der Abstand r_i zwischen dem Massenelement dm und der Sonne lässt sich nun in Abhängigkeit zum Azimutalwinkel \mathbf{j} ausdrücken:

$$r_i = r_{\text{Erde-Sonne}} - R_i = r_{\text{Erde-Sonne}} - a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}$$

Bei $\mathbf{j} = 0$ (geringster Abstand zwischen dm und der Sonne) wird r_i minimal, bei $\mathbf{j} = 90^\circ$ stellt sich die astronomische Einheit ein (Abstand zwischen den Mittelpunkten von Erde und Sonne). Durch unsere vereinfachende Annahme, die Richtungen aller Kräfte zwischen der Sonne und den Masseperlen dm seien parallel zueinander, vernachlässigen wir die Drehmomentkomponenten, die nicht parallel zur gedachten Aufrichtachse liegen. Da der Erdkörper aber rotationssymmetrisch ist und sich immer Paare von Massenelementen dm finden lassen, welche spiegelsymmetrisch zur Ebene sind, die durch die Verbindungslinie Erde-Sonne und Ekliptikpol gebildet ist, heben sich diese Komponenten ohnehin paarweise auf.

Wir können nun das Drehmoment durch Integration ermitteln. Da wir bei der Diskussion die Richtungsinformation nur qualitativ berücksichtigen, dürfen wir keine volle Integration über den Azimutalwinkel \mathbf{j} ausführen, denn die in Abbildung 4 unterhalb der Ekliptik liegenden Massenperlen dm tragen zum Aufrichtbestreben bei, während die Kräfte auf die oberhalb der ekliptischen Ebene befindlichen Massenelemente zu einer „Umstürztendenz“ der Erde führen. Da die Abstände der Massenelemente zur Sonne aber unterschiedlich groß sind, „gewinnt“ im skizzierten Fall der Abbildung 4 das Aufrichtbestreben. Beide Anteile zum Gesamtdrehmoment sind folglich voneinander abzuziehen. Durch Einsetzen von r_i in dF , dF und a_i in die Formel für dM und die Integration über den Winkel \mathbf{j} erhalten wir jeweils (M_{auf} ist das Drehmoment welches den Erdkreislauf aufzurichten bestrebt ist, M_{ab} hat das gegenteilige Bestreben):

$$M_{\text{auf}} = a \cdot \sin \mathbf{e} \cdot G \cdot \frac{m_{\text{Wulst}}}{2\mathbf{p}} \cdot \frac{m_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^2} \cdot \int_{-p/2}^{p/2} \frac{\cos \mathbf{j}}{\left(1 - \frac{a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}}{r_{\text{Erde-Sonne}}}\right)^2} d\mathbf{j}$$

$$M_{\text{ab}} = a \cdot \sin \mathbf{e} \cdot G \cdot \frac{m_{\text{Wulst}}}{2\mathbf{p}} \cdot \frac{m_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^2} \cdot \int_{-p/2}^{p/2} \frac{\cos \mathbf{j}}{\left(1 + \frac{a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}}{r_{\text{Erde-Sonne}}}\right)^2} d\mathbf{j}$$

Das resultierende Drehmoment der Sonne auf den Erdellipsoid berechnet sich somit zu:

$$\begin{aligned} M_{\text{Sonne}} &= M_{\text{auf}} - M_{\text{ab}} \\ &= G \cdot \frac{m_{\text{Wulst}}}{2\mathbf{p}} \cdot a \cdot \sin \mathbf{e} \cdot \frac{m_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^2} \cdot \int_{-p/2}^{p/2} d\mathbf{j} \frac{\cos \mathbf{j}}{\left(1 - \frac{a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}}{r_{\text{Erde-Sonne}}}\right)^2} - \frac{\cos \mathbf{j}}{\left(1 + \frac{a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}}{r_{\text{Erde-Sonne}}}\right)^2} \end{aligned}$$

Der Integralausdruck lässt sich weiter vereinfachen, indem wir den Hauptnenner bilden:

$$\int_{-p/2}^{p/2} d\mathbf{j} \frac{\cos \mathbf{j}}{\left(1 - \frac{a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}}{r_{\text{Erde-Sonne}}}\right)^2} - \frac{\cos \mathbf{j}}{\left(1 + \frac{a \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \cos \mathbf{j}}{r_{\text{Erde-Sonne}}}\right)^2} = 4 \cdot \frac{a \cdot \cos \mathbf{e}}{r_{\text{Erde-Sonne}}} \cdot \int_{-p/2}^{p/2} \frac{\cos^2 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{j}}{\left(1 - \frac{a^2 \cdot \cos^2 \mathbf{e}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^2} \cdot \cos^2 \mathbf{j}\right)^2}$$

Das verbleibende Integral sieht kompliziert aus. Die analytische Auswertung ist aber gar nicht erforderlich, wenn wir bedenken, dass bei den angebrachten Vereinfachungen sowieso kein exaktes Ergebnis zu erwarten ist. Betrachten wir das Integral aus der Sicht unserer reduzierten Genauigkeitsansprüche, so erkennen wir, dass sich der Nenner niemals sehr von 1 unterscheiden kann, ganz gleich welche Werte wir für \mathbf{j} annehmen. Durch die Kleinheit des Ausdrucks a^2/r^2 wird ein Einfluss durch das variable $\cos^2 \mathbf{j}$ im Nenner beinahe gänzlich unterdrückt, so dass sich das gesamte Integral kaum von einer Integration über den $\cos^2 \mathbf{j}$ unterscheidet. Es ist damit gerechtfertigt, das obige Integral durch den leicht zu integrierenden $\cos^2 \mathbf{j}$ zu ersetzen. Die Stammfunktion findet sich in jeder Integraltafel und bei den gegebenen Integrationsgrenzen erhalten wir für das Integral den Wert $\pi/2$:

$$\int_{-p/2}^{p/2} \frac{\cos^2 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{j}}{\left(1 - \frac{a^2 \cdot \cos^2 \mathbf{e}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^2} \cdot \cos^2 \mathbf{j}\right)^2} \approx \int_{-p/2}^{p/2} \cos^2 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{j} = \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{1}{4} \cdot \sin 2\mathbf{j} \Big|_{-p/2}^{+p/2} = \frac{\mathbf{p}}{4} - \frac{-\mathbf{p}}{4} = \frac{\mathbf{p}}{2}$$

Das Ergebnis wird verständlich, wenn wir bedenken, dass der Mittelwert des $\sin^2 \mathbf{j}$ und des $\cos^2 \mathbf{j}$ über eine ganze Periode von 0 bis 2π gemittelt jeweils $\frac{1}{2}$ beträgt ($\sin^2 \mathbf{j} + \cos^2 \mathbf{j}$ ist immer 1 für alle \mathbf{j}). Der Flächeninhalt des Integrals von $\cos^2 \mathbf{j}$ (und auch $\sin^2 \mathbf{j}$) über eine Periode beträgt somit π . Da wir bei den gegebenen Integrationsgrenzen nur über eine halbe Periode integrieren, erhalten wir den Wert $\pi/2$.

Fassen wir nun unser Ergebnis unter Berücksichtigung des analog zu berechnenden Mondeinflusses zusammen und ziehen ein Zwischenresummeé:

$$M \approx 4 \cdot \frac{m_{\text{Wulst}}}{2\mathbf{p}} \cdot a^2 \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \sin \mathbf{e} \cdot G \cdot \left(\frac{m_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^3} + \frac{m_{\text{Mond}}}{r_{\text{Erde-Mond}}^3} \right) \cdot \frac{\mathbf{p}}{2}$$

Gegenüber unserer ersten groben Abschätzung in Schritt 3 hat sich das Drehmoment reduziert, und zwar um den Faktor $1/4$, der durch die Modellannahme der äquatorialen Perlenschnur und die Integration über den $\cos^2 \mathbf{j}$ zustande kommt. Die Verteilung der Wulstmasse längs des Äquators bewirkt den Faktor $1/(2\pi)$, die Berechnung der Gezeiteneffekte zwischen dem der Sonne zugewandten bzw. abgewandten Wulstelement führt zum Faktor 4 und die Integration liefert $\pi/2$. Die Verringerung des wirksamen Drehmomentes ist ein vernünftiges Ergebnis, wenn wir bedenken, dass je nach Lage eines Massenelementes die jeweils einwirkende Gravitationskraft ein Drehmoment zwischen Null und einem Maximalwert bewirken kann. Wir ersetzen nun noch in obiger Formel die Wulstmasse und erhalten:

$$M \approx m_{\text{Erde}} \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) \cdot a^2 \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \sin \mathbf{e} \cdot G \cdot \left(\frac{m_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^3} + \frac{m_{\text{Mond}}}{r_{\text{Erde-Mond}}^3} \right)$$

Bislang haben wir Sonne und Mond aber immer noch als punktförmige Schwerkraftzentren angesehen. Wir müssen nun in Betracht ziehen, dass sie im Vergleich zur Platonischen Jahreslänge eine kleine Umlaufzeit besitzen. Folglich können wir uns vorstellen, ihre Massen seien längs der Ekliptik verschmiert. Die Annahme der Gleichverteilung der Sonnen- und Mondmasse führt zu einer weiteren Reduzierung des Drehmomentes, weil die Verhältnisse dann nicht so einfach sind wie es in der Abbildung 4 dargestellt ist. Abbildung 4 zeigt die Situation, bei der sich das maximale Drehmoment - unter Berücksichtigung der gleichverteilten Wulstmasse der Erde - einstellt. Steht die Sonne bzw. der Mond an den Äquinoktialpunkten (siehe Abbildung 6), so wird überhaupt kein Drehmoment auf den Erdkörper ausgeübt. Stehen Sonne und Mond in den Wendepunkten, wirkt wieder das volle Drehmoment. Bei einer gleichmäßigen Verschmierung von Sonne und Mond in der ekliptischen Ebene tragen alle Massenelemente dm der Sonnen- bzw. Mondschnur mit unterschiedlichen Beträgen zum Gesamtdrehmoment bei. In den Wendepunkten, also bei $\mathbf{j} = 0$ bzw. $\mathbf{j} = 90^\circ$, beträgt der Beitrag 100% dessen, was ein einzelnes Massenelement je erreichen kann. In den Äquinoktien, also bei $\mathbf{j} = 90^\circ$ und $\mathbf{j} = 270^\circ$ ist der Beitrag 0. In Analogie zur oben diskutierten Integration über alle Massenelemente des Äquatorwulstes können wir auch hier die Verhältnisse durch eine Integration über den $\cos^2 \mathbf{j}$ modellieren:

$$M \propto \frac{m_{\text{Sonne}}}{2\mathbf{p}} \cdot \int_0^{2\mathbf{p}} \cos^2 \mathbf{j} \, d\mathbf{j} = \frac{m_{\text{Sonne}}}{2\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = \frac{m_{\text{Sonne}}}{2}$$

Wir erreichen damit eine weitere Halbierung des Gesamtdrehmomentes. Unser Modell liefert folgendes Endergebnis für das Drehmoment (Mondrechnung inklusive):

$$\text{Endergebnis: } M \approx \frac{1}{2} m_{\text{Erde}} \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) \cdot a^2 \cdot \cos \mathbf{e} \cdot \sin \mathbf{e} \cdot G \cdot \left(\frac{m_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erde-Sonne}}^3} + \frac{m_{\text{Mond}}}{r_{\text{Erde-Mond}}^3} \right)$$

Sechster Schritt: Diskussion des Ergebnisses und Vergleich mit der Theorie

Wir sind damit am Ende der Möglichkeiten der Behandlung des Themas durch unsere einfache Modellvorstellung angelangt und können alles zusammenfassen. Die Frequenz der Erdpräzession berechnet sich zu:

$$w_P = \frac{M}{L_{Erde} \cdot \sin e} \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot m_{Erde} \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) \cdot a^2 \cdot \cos e \cdot \sin e}{\frac{2}{5} \cdot m_E \cdot a^2 \cdot \sin e} \cdot \left(\frac{T_{Sterntag}}{2p}\right) \cdot G \cdot \left(\frac{m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^3} + \frac{m_{Mond}}{r_{Erde-Mond}^3}\right)$$

$$\approx \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) \cdot \cos e \cdot \left(\frac{T_{Sterntag}}{2p}\right) \cdot G \cdot \left(\frac{m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^3} + \frac{m_{Mond}}{r_{Erde-Mond}^3}\right)$$

Die himmelsmechanische Behandlung der Lunisolarpräzession liefert dagegen folgenden Ausdruck [1]:

$$w_P = \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{C-A}{C}\right)}_{\substack{\text{dynamische Abplattung} \\ \text{der Erde} \approx 1/306}} \cdot \cos e \cdot \left(\frac{T_{Sterntag}}{2p}\right) \cdot G \cdot \left(\frac{m_{Sonne}}{r_{Erde-Sonne}^3} + \frac{m_{Mond}}{r_{Erde-Mond}^3}\right)$$

Unser Ergebnis hat eine große Verwandtschaft mit dem exakten Ausdruck und zeigt die korrekte funktionale Abhängigkeit von Sonnen- und Mondmasse sowie der Sonnen- und Mondentfernung. Einsetzen dieser Werte zeigt, dass der Einfluss durch den Mond etwa doppelt so groß ist wie der der Sonne. Die dynamische Abplattung der Erde, die sich aus den Hauptträgheitsmomenten C und A des Erdkörpers berechnet, ist mit unserem Ausdruck $(c^2/a^2 - 1)$, den wir bei der Abschätzung der Wulstmasse erhielten, ebenfalls verwandt, denn in das Trägheitsmoment geht die charakteristische Ausdehnung quadratisch ein.

Durch Einsetzen aller Zahlenwerte in die Formel für die Periodendauer eines Präzessionszyklus erhalten wir schließlich die Länge des Platonischen Jahres:

$$T_{\text{Platonisches Jahr}} = \frac{2p}{w_P} \approx 15000 \text{ Jahre (aus unserem Modell) bzw.}$$

$$T_{\text{Platonisches Jahr}} = \frac{2p}{w_P} \approx 25800 \text{ Jahre (aus der Beobachtung und der Himmelsmechanik)}$$

Unser Modell liefert also die richtige Größenordnung, und damit können wir bei der Vielzahl der Vereinfachungen sehr zufrieden sein. Bei den vorausgesetzten Kenntnissen haben wir unser Modell auch ausgereizt und können keine bessere Übereinstimmung mit der Beobachtung erzielen, die wir im Rahmen unserer Modellvorstellung sinnvoll begründen könnten. Es kommt uns aber von Seiten der Theorie noch eine Ergänzung entgegen, die hier nicht unerwähnt bleiben soll. Das von uns diskutierte Modell der äquatorialen Perlenschnur für die Wulstmasse des Erdellipsoiden hat Tradition in der Potentialtheorie der Gravitation, wenn es darum geht, einen Näherungsausdruck für das Gravitationspotential eines ellipsoiden Planeten zu gewinnen. Ein Blick in ein Lehrbuch der theoretischen Himmelsmechanik [4] zeigt uns, dass ein solcher Planet durch eine Kugel mit Polradius und einen massebelegten Faden modelliert werden kann, welcher die gesamte von der Kugelform abweichende Restmasse beinhaltet und die Polradiuskugel in einem Abstand von $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot c$ vom Mittelpunkt umspannt. In unserem Modell hatten wir die Perlenschnur am Äquator auf die Polradiuskugel aufgelegt. Der obige Hinweis lehrt uns aber, dass wir sie ins Innere der Polradiuskugel bei einem Radius von $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot c = 0,635a$ verlegen müssen. Durch die Berücksichtigung dieses *ad-hoc*-Hinweises reduziert sich das Gesamtdrehmoment auf die Erde nochmals, da nun der Hebelarm (der Abstand eines Massenelementes dm der Äquatorschnur zum Erdmittelpunkt) verringert ist. Berücksichtigen wir dies noch bei der zahlenmäßigen Auswertung, indem wir den Ausdruck a^2 in der Formel für das Drehmoment durch $\frac{2}{5} \cdot c^2$ ersetzen, so erhalten wir eine Zykluslänge von ca. 37500 Jahren. Dieser Hinweis lehrt uns also, dass wir uns innerhalb der richtigen Größenordnung bewegen, aber

auch, dass durch Basteln am Ergebnis (was z.B. durch ein Überdenken des Erdträgheitsmomentes weiter möglich wäre) keine Steigerung der Aussagekraft erzielt werden kann.

Wenn wir das Ergebnis der exakten Berechnung noch durch unser eigenes ausdrücken (ohne Berücksichtigung des *ad-hoc*-Hinweises), erhalten wir:

$$T_{\text{Platonisches Jahr}}(\text{exakt}) = T_{\text{Platonisches Jahr}}(\text{unser Modell}) \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) / \frac{4}{5} \left(\frac{C-A}{C} \right) \approx 1,7 \cdot T_{\text{Platonisches Jahr}}(\text{unser Modell})$$

Abschließend bleibt zu sagen, dass unser einfaches Modell die volle Theorie der Kreiselbewegung und Präzession natürlich nicht ersetzen kann, aber doch eine einführende Behandlung dieses für die Astronomiedidaktik so wichtigen Themas der Wanderung des Frühlingspunktes im Tierkreis im Oberstufenunterricht ermöglicht. Die himmelsmechanische Berechnung des präzidierenden Erdkreisels ist sehr aufwendig und daher ein Arbeitsgebiet für Spezialisten.

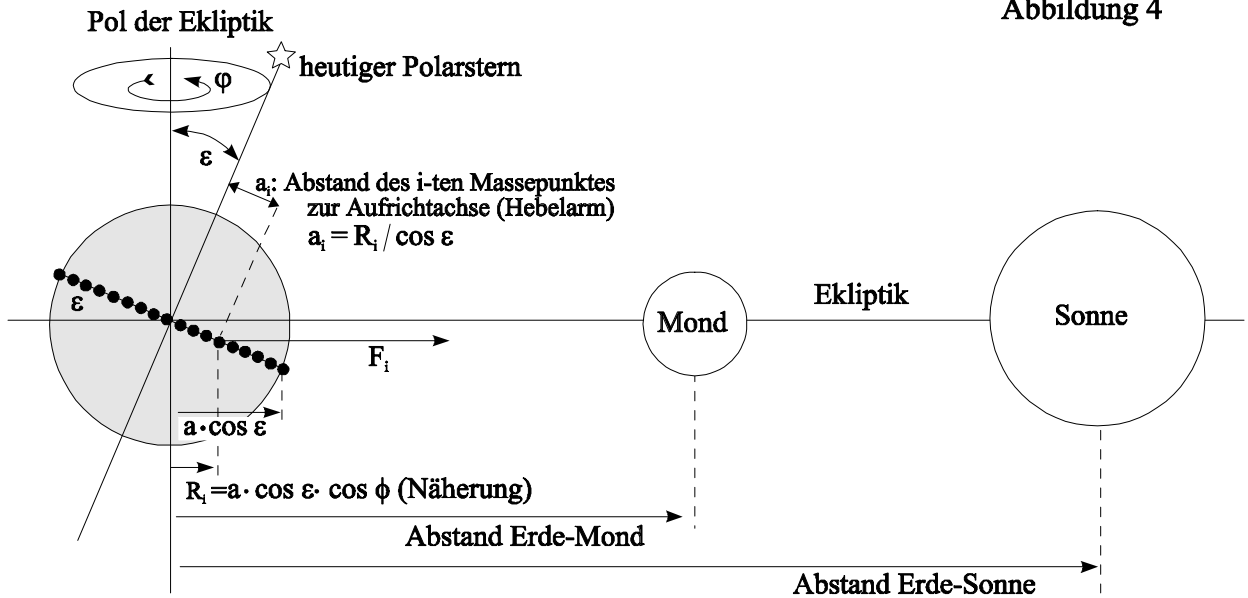
Das hier vorgestellte Modell erklärt den Einfluss der dominierenden astronomischen Größen wie Massen, Entfernungen oder der Rotationsdauer der Erde auf die Länge des Platonischen Jahres korrekt. Wie so oft bei vereinfachten Abschätzungen unterscheidet sich das Ergebnis von der Wirklichkeit nur um einen numerischen Faktor von der Größenordnung 1. Solche Faktoren schlüpfen bei einer Abschätzung immer durchs methodische Raster; sie zu bestimmen, bleibt der vollen Theorie vorbehalten.

Literaturangaben:

- [1] Manfred Schneider: Himmelsmechanik, 2. verb. Aufl., Bibliographisches Institut, Mannheim Wien Zürich 1981, S. 308 ff
- [2] Joachim Gürtler & Johann Dorschner: Das Sonnensystem, Johann Ambrosius Barth, Leipzig Berlin Heidelberg 1993, S. 96 ff
- [3] Jacques Laskar: Der Mond und die Stabilität des Erdklimas; Spektrum der Wissenschaft September 1993, S. 48 ff
- [4] Karl Stumpf: Himmelsmechanik, Bd. I, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, S. 139

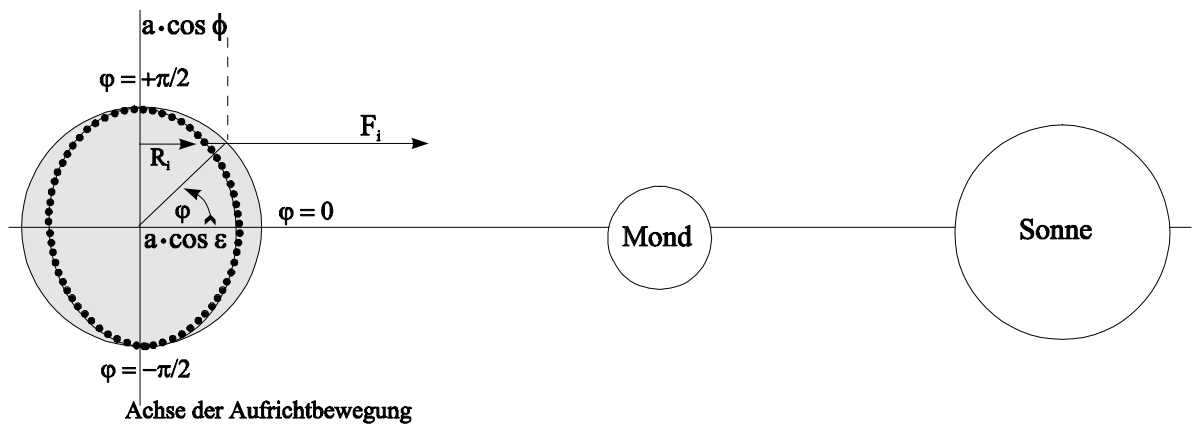
Im verbesserten Äquatorwulstmodell: Die Kräfte auf die Perlen führen zu Beiträgen zum Drehmoment, die zwischen Null und einem Maximalwert variieren.

Abbildung 4



Betrachtung vom Pol der Ekliptik

Abbildung 5



Näherung: $R_i = a \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos \phi$

Abstand vom i-ten Massepunkt zum Mond: $r_i = r_{\text{Erde-Mond}} \pm R_i$

Weitere Verbesserung: Sonne und Mond werden durch Massenschnüre in der ekliptischen Ebene modelliert.
Grund: Während des Jahres- bzw. Monatslaufs nehmen Sonne bzw. Mond alle möglichen Lagen zum Äquatorwulst ein.

Abbildung 6

